

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                      |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung und Beispiele</b>                                      | <b>1</b>  |
| 1.1      | Was ist optimale Steuerung? . . . . .                                | 1         |
| 1.2      | Beispiele konvexer Aufgaben . . . . .                                | 2         |
| 1.2.1    | Optimale stationäre Aufheizung . . . . .                             | 2         |
| 1.2.2    | Optimale instationäre Randtemperatur . . . . .                       | 4         |
| 1.2.3    | Optimales Schwingen . . . . .                                        | 5         |
| 1.3      | Beispiele nichtkonvexer Probleme . . . . .                           | 6         |
| 1.3.1    | Aufgaben mit semilinear elliptischer Gleichung . . . . .             | 6         |
| 1.3.2    | Probleme mit semilinear parabolischer Gleichung . . . . .            | 7         |
| 1.4      | Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall . . . . .                 | 8         |
| 1.4.1    | Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung . . . . .        | 8         |
| 1.4.2    | Existenz optimaler Steuerungen . . . . .                             | 9         |
| 1.4.3    | Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .          | 10        |
| 1.4.4    | Adjungierter Zustand und reduzierter Gradient . . . . .              | 11        |
| 1.4.5    | Lagrangefunktion . . . . .                                           | 13        |
| 1.4.6    | Diskussion der Variationsungleichung . . . . .                       | 14        |
| 1.4.7    | Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System . . . . .                 | 14        |
| <b>2</b> | <b>Linear-quadratische elliptische Probleme</b>                      | <b>17</b> |
| 2.1      | Lineare normierte Räume . . . . .                                    | 17        |
| 2.2      | Sobolewräume . . . . .                                               | 19        |
| 2.2.1    | $L^p$ -Räume . . . . .                                               | 19        |
| 2.2.2    | Reguläre Gebiete . . . . .                                           | 21        |
| 2.2.3    | Schwache Ableitungen und Sobolewräume . . . . .                      | 21        |
| 2.3      | Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen . . . . .                 | 24        |
| 2.3.1    | Poissongleichung . . . . .                                           | 24        |
| 2.3.2    | Randbedingung dritter Art . . . . .                                  | 27        |
| 2.3.3    | Differentialoperator in Divergenzform . . . . .                      | 30        |
| 2.4      | Lineare Abbildungen . . . . .                                        | 32        |
| 2.4.1    | Lineare stetige Operatoren und Funktionale . . . . .                 | 32        |
| 2.4.2    | Schwache Konvergenz . . . . .                                        | 35        |
| 2.5      | Existenz optimaler Steuerungen . . . . .                             | 38        |
| 2.5.1    | Optimale stationäre Temperaturquelle . . . . .                       | 38        |
| 2.5.2    | Optimale stationäre Randtemperatur . . . . .                         | 42        |
| 2.5.3    | Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale * . . . . . | 43        |
| 2.6      | Differenzierbarkeit in Banachräumen . . . . .                        | 44        |
| 2.7      | Adjungierte Operatoren . . . . .                                     | 47        |
| 2.8      | Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .          | 49        |
| 2.8.1    | Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum . . . . .            | 50        |
| 2.8.2    | Optimale stationäre Temperaturquelle . . . . .                       | 51        |

|          |                                                                                        |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.8.3    | Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art . . .                        | 59        |
| 2.8.4    | Optimale stationäre Randtemperatur . . . . .                                           | 60        |
| 2.8.5    | Ein lineares Optimalsteuerungsproblem . . . . .                                        | 63        |
| 2.9      | Konstruktion von Testaufgaben . . . . .                                                | 63        |
| 2.9.1    | Bang-Bang-Steuerung . . . . .                                                          | 64        |
| 2.9.2    | Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung . . . . .                                | 65        |
| 2.10     | Das formale Lagrangeprinzip . . . . .                                                  | 67        |
| 2.11     | Weitere Beispiele * . . . . .                                                          | 71        |
| 2.11.1   | Differentialoperator in Divergenzform . . . . .                                        | 71        |
| 2.11.2   | Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außen-<br>temperatur . . . . .   | 72        |
| 2.12     | Numerische Verfahren . . . . .                                                         | 72        |
| 2.12.1   | Bedingtes Gradientenverfahren . . . . .                                                | 73        |
| 2.12.2   | Gradienten-Projektionsverfahren . . . . .                                              | 76        |
| 2.12.3   | Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches<br>Optimierungsproblem . . . . . | 77        |
| 2.12.4   | Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie . . . . .                                         | 80        |
| 2.13     | Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator * . . . . .                       | 85        |
| 2.13.1   | Elliptische Gleichungen mit Daten aus $V^*$ . . . . .                                  | 85        |
| 2.13.2   | Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen . . . . .                            | 86        |
| 2.13.3   | Adjungierter Zustand als Multiplikator . . . . .                                       | 88        |
| 2.14     | Höhere Regularität für elliptische Aufgaben * . . . . .                                | 89        |
| 2.14.1   | Grenzen des Zustandsraums $H^1(\Omega)$ . . . . .                                      | 89        |
| 2.14.2   | Sobolew-Slobodetskii-Räume . . . . .                                                   | 89        |
| 2.14.3   | Höhere Regularität von Lösungen . . . . .                                              | 90        |
| 2.15     | Regularität optimaler Steuerungen * . . . . .                                          | 91        |
| 2.16     | Übungsaufgaben . . . . .                                                               | 93        |
| <b>3</b> | <b>Linear-quadratische parabolische Probleme</b>                                       | <b>95</b> |
| 3.1      | Einführung . . . . .                                                                   | 95        |
| 3.2      | Die Fouriermethode im örtlich eindimensionalen Fall . . . . .                          | 99        |
| 3.2.1    | Eindimensionale Modellprobleme . . . . .                                               | 99        |
| 3.2.2    | Integraldarstellung von Lösungen – Greensche Funktion . . . . .                        | 100       |
| 3.2.3    | Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .                                           | 102       |
| 3.2.4    | Bang-Bang-Prinzip . . . . .                                                            | 106       |
| 3.3      | Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$ . . . . .                                          | 110       |
| 3.4      | Schwache Lösungen in $W(0, T)$ . . . . .                                               | 113       |
| 3.4.1    | Abstrakte Funktionen . . . . .                                                         | 113       |
| 3.4.2    | Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen . . . . .                            | 116       |
| 3.4.3    | Vektorwertige Distributionen . . . . .                                                 | 116       |
| 3.4.4    | Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$ . . . .               | 119       |
| 3.5      | Parabolische Optimalsteuerungsprobleme . . . . .                                       | 123       |
| 3.5.1    | Optimale instationäre Randtemperatur . . . . .                                         | 123       |
| 3.5.2    | Optimale instationäre Temperaturquelle . . . . .                                       | 124       |
| 3.6      | Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .                                           | 125       |
| 3.6.1    | Hilfssatz für adjungierte Operatoren . . . . .                                         | 126       |
| 3.6.2    | Optimale instationäre Randtemperatur . . . . .                                         | 127       |
| 3.6.3    | Optimale instationäre Temperaturquelle . . . . .                                       | 130       |

|          |                                                        |            |
|----------|--------------------------------------------------------|------------|
| 3.6.4    | Differentialoperator in Divergenzform *                | 131        |
| 3.7      | Numerische Lösungstechniken                            | 134        |
| 3.7.1    | Gradienten-Projektionsverfahren                        | 134        |
| 3.7.2    | Aufstellen des reduzierten Problems                    | 135        |
| 3.8      | Herleitung der verwendeten Fourierentwicklungen        | 138        |
| 3.9      | Parabolische Gleichungen in $L^2(0, T; V^*)$ *         | 141        |
| 3.10     | Übungsaufgaben                                         | 143        |
| <b>4</b> | <b>Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen</b> | <b>145</b> |
| 4.1      | Vorbemerkungen                                         | 145        |
| 4.2      | Semilineare elliptische Modellgleichung                | 146        |
| 4.2.1    | Motivation des weiteren Vorgehens                      | 146        |
| 4.2.2    | Lösungen in $H^1(\Omega)$                              | 147        |
| 4.2.3    | Stetige Lösungen                                       | 151        |
| 4.2.4    | Abschwächung der Voraussetzungen                       | 154        |
| 4.3      | Nemytskii-Operatoren                                   | 156        |
| 4.3.1    | Stetigkeit von Nemytskii-Operatoren                    | 156        |
| 4.3.2    | Differenzierbarkeit von Nemytskii-Operatoren           | 158        |
| 4.3.3    | Ableitungen in weiteren $L^p$ -Räumen *                | 162        |
| 4.4      | Existenz optimaler Steuerungen                         | 163        |
| 4.4.1    | Grundvoraussetzungen des Kapitels                      | 163        |
| 4.4.2    | Verteilte Steuerung                                    | 165        |
| 4.5      | Der Steuerungs-Zustands-Operator                       | 168        |
| 4.5.1    | Verteilte Steuerung                                    | 169        |
| 4.5.2    | Randsteuerung                                          | 171        |
| 4.6      | Notwendige Optimalitätsbedingungen                     | 171        |
| 4.6.1    | Verteilte Steuerung                                    | 171        |
| 4.6.2    | Randsteuerung                                          | 174        |
| 4.7      | Anwendung des formalen Lagrangeprinzips                | 176        |
| 4.8      | Pontrjaginsches Maximumprinzip *                       | 178        |
| 4.8.1    | Hamiltonfunktionen                                     | 178        |
| 4.8.2    | Maximumprinzip                                         | 179        |
| 4.9      | Ableitungen zweiter Ordnung                            | 180        |
| 4.10     | Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung                | 184        |
| 4.10.1   | Grundideen hinreichender Optimalitätsbedingungen       | 184        |
| 4.10.2   | Die Zwei-Norm-Diskrepanz                               | 187        |
| 4.10.3   | Verteilte Steuerung                                    | 190        |
| 4.10.4   | Randsteuerung                                          | 198        |
| 4.10.5   | Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen *         | 199        |
| 4.10.6   | Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz                        | 203        |
| 4.10.7   | Lokale Optimalität in $L^r(\Omega)$                    | 204        |
| 4.11     | Numerische Verfahren                                   | 205        |
| 4.11.1   | Gradienten-Projektionsverfahren                        | 205        |
| 4.11.2   | Grundidee des SQP-Verfahrens                           | 205        |
| 4.11.3   | Das SQP-Verfahren für elliptische Probleme             | 207        |
| 4.12     | Übungsaufgaben                                         | 210        |

|          |                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen</b>       | <b>211</b> |
| 5.1      | Die semilineare parabolische Modellgleichung . . . . .        | 211        |
| 5.2      | Grundvoraussetzungen des Kapitels . . . . .                   | 213        |
| 5.3      | Existenz optimaler Steuerungen . . . . .                      | 214        |
| 5.4      | Steuerungs-Zustands-Operator . . . . .                        | 217        |
| 5.5      | Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .                  | 220        |
| 5.5.1    | Verteilte Steuerung . . . . .                                 | 221        |
| 5.5.2    | Randsteuerung . . . . .                                       | 224        |
| 5.6      | Pontrjaginsches Maximumprinzip * . . . . .                    | 226        |
| 5.7      | Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . . .             | 227        |
| 5.7.1    | Ableitungen zweiter Ordnung . . . . .                         | 227        |
| 5.7.2    | Verteilte Steuerung . . . . .                                 | 229        |
| 5.7.3    | Randsteuerung . . . . .                                       | 233        |
| 5.7.4    | Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz . . . . .                  | 234        |
| 5.8      | Testaufgaben . . . . .                                        | 235        |
| 5.8.1    | Testaufgabe mit Steuerungsrestriktionen . . . . .             | 236        |
| 5.8.2    | Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion * . . . . .        | 238        |
| 5.9      | Numerische Verfahren . . . . .                                | 243        |
| 5.9.1    | Gradientenverfahren . . . . .                                 | 243        |
| 5.9.2    | Das SQP-Verfahren . . . . .                                   | 244        |
| 5.10     | Weitere parabolische Probleme * . . . . .                     | 247        |
| 5.10.1   | Phasenfeldmodell . . . . .                                    | 247        |
| 5.10.2   | Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .              | 249        |
| 5.11     | Übungsaufgaben . . . . .                                      | 253        |
| <b>6</b> | <b>Optimierungsaufgaben im Banachraum</b>                     | <b>254</b> |
| 6.1      | Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .                      | 254        |
| 6.1.1    | Konvexe Aufgaben . . . . .                                    | 254        |
| 6.1.2    | Differenzierbare Aufgaben . . . . .                           | 259        |
| 6.1.3    | Eine semilineare elliptische Aufgabe . . . . .                | 263        |
| 6.2      | Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen . . . . .           | 265        |
| 6.2.1    | Konvexe Aufgaben . . . . .                                    | 266        |
| 6.2.2    | Eine nichtkonvexe Aufgabe . . . . .                           | 273        |
| 6.3      | Übungsaufgaben . . . . .                                      | 276        |
| <b>7</b> | <b>Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen</b>      | <b>277</b> |
| 7.1      | Einbettungssätze . . . . .                                    | 277        |
| 7.2      | Elliptische Gleichungen . . . . .                             | 278        |
| 7.2.1    | Elliptische Regularität und Stetigkeit von Lösungen . . . . . | 278        |
| 7.2.2    | Methode von Stampacchia . . . . .                             | 279        |
| 7.2.3    | Elliptische Gleichungen mit Maßen . . . . .                   | 284        |
| 7.3      | Parabolische Gleichungen . . . . .                            | 285        |
| 7.3.1    | Lösungen in $W(0, T)$ . . . . .                               | 285        |
| 7.3.2    | Stetige Lösungen . . . . .                                    | 293        |
|          | <b>Index</b>                                                  | <b>298</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>                                   | <b>301</b> |