2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Niedersachsen

Mathematik e

+ *Übungsaufgaben*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Stochastik

Analytische Geometrie

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MyStark.

Abiturprüfung 2019

Der Jahrgang 2020 fehlt, da wegen der Umstellung von G8 auf G9 in diesem Jahr nur für sehr wenige Schüler eine Abiturprüfung stattgefunden hat.

Abiturprüfung 2021

Abiturprüfung 2022

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021 bis 2023** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlag-innenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autoren
Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2019 und 2021 bis 2023)
Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2018)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2024** im **Erhöhten Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Erhöhte Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2024**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2019 und 2021 bis 2023**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021 bis 2023**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Die Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.
Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **sechs Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt.
Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Den Schülerinnen und Schülern werden zwei Aufgaben aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle vier bearbeitet werden müssen.
Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu jedem der drei Sachgebiete jeweils zwei Aufgaben, aus denen sie insgesamt zwei auswählen, die sie bearbeiten.
Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.
Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.
In der Analysisaufgabe können 40 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 25. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden sowohl die Aufgaben des Prüfungsteils A als auch des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 100 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Prüfungsteil B

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung das auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Dokument mit mathematischen Formeln“ und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2024“ weitere Angaben gemacht.

Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

2.1 Analysis

Einführungsphase

Elementare Funktionenlehre
- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (auch Wurzelfunktionen)
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten
- Umkehrfunktionen: Definitions- und Wertemenge, Zusammenhang zwischen Graph einer Funktion und der zugehörigen Umkehrfunktion

Ableitungen
- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^{\neq 0})$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$
- Summen, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

Qualifikationsphase

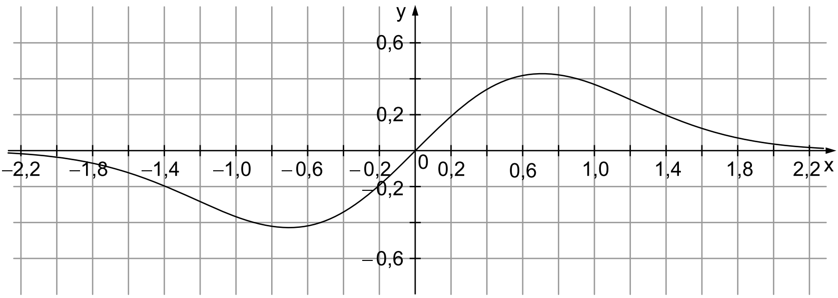
Differentialrechnung
- Gauß-Algorithmus
- ganzrationale Funktionen bestimmen
- Produkt- und Kettenregel
- abschnittsweise definierte Funktionen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei abschnittsweise definierten Funktionen
- Funktionenscharen

Integralrechnung
- Rekonstruktion aus Änderungsraten
- Integral als Grenzwert
- Stammfunktionen zu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\})$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$

Niedersachsen Mathematik
Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A

Analysis

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen von f.

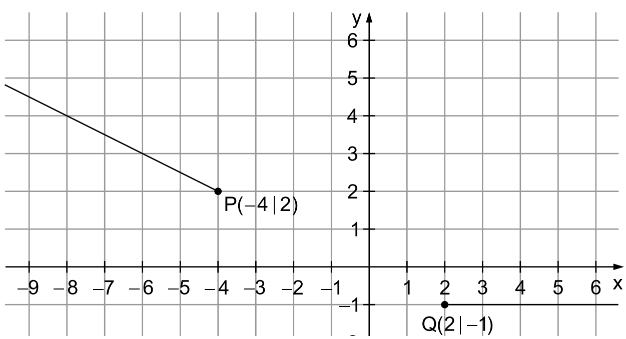


a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes der Kurve.

c) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit $x = a$ $(a > 0)$ begrenzen ein Flächenstück.
Bestimmen Sie diejenige Zahl a, für die diese Fläche die Maßzahl $\frac{1}{4}$ aufweist.

2. Die beiden Halbgeraden des Schaubildes sollen durch den Graphen einer Polynomfunktion g möglichst geringen Grades verbunden werden. Die Übergänge sollen dabei glatt und krümmungsruckfrei sein.
Erläutern Sie die von Ihnen gemachten Forderungen und den daraus folgenden Ansatz. g(x) soll nicht bestimmt werden.

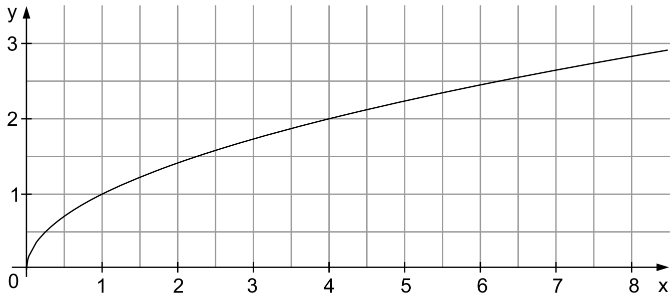


3. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

b) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Gerade mit $y = a$ mit dem Graphen von f genau zwei Schnittpunkte hat.

4. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$.



a) Zeigen Sie, dass nur an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ Ableitung und Funktionswert übereinstimmen.

b) Untersuchen Sie, ob es auf dem Graphen von f einen Punkt P gibt, sodass die Tangente durch den Punkt $S(0\,|\,1)$ verläuft.

c) Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche, die die y-Achse, die Gerade mit $y = 1$ und der Graph von f begrenzen.

5. Gegeben seien die Funktionen f mit $f(x) = e^{2x+6}$; $x \in \mathbb{R}$, und g mit $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie diejenige Stelle, an der f(x) den Wert 4 annimmt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen.

6. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}e^x + 2$.

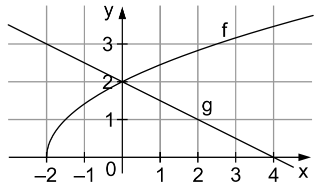
a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D(f) und die Wertemenge W(f) an und begründen Sie, dass f umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion und geben Sie $D(f^{-1})$ an.
Skizzieren Sie beide Graphen in einem Koordinatensystem.

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden mit der Steigung –1, die auf beiden Graphen senkrecht steht.

7. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{2x+4}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y=-\frac{1}{2}x+2$.

a) Zeigen Sie, dass durch $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}$ die Ableitung von f(x) gegeben ist.



b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und die Gleichung der Normale im Punkt $P(0\,|\,2)$ des Graphen von f.

c) Gegeben ist die Funktion h_a mit $h_a(x)=\sqrt{a\cdot x+4}$ und $a>0$.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass die Gerade g die Normale im Punkt $P(0\,|\,2)$ des Graphen von h_a ist.

8. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass f über $D=\mathbb{R}^{\geq 1}$ umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte, die sowohl auf dem Graphen von f als auch auf dem Graphen von f^{-1} liegen.

c) Die Graphen der Funktionen f und f^{-1} begrenzen ein Flächenstück.
Skizzieren Sie es und berechnen Sie seine Maßzahl.

Stochastik

9. In einer Urne befinden sich 1 blaue, 4 rote und 5 grüne Kugeln.

a) Aus der Urne wird ohne Zurücklegen 3-mal gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Es werden genau 2 rote Kugeln gezogen.
B: Es werden eine blaue, eine rote und eine grüne Kugel gezogen.
C: Es wird 3-mal dieselbe Farbe gezogen.

b) Es wird nun 8-mal ohne Zurücklegen gezogen.
Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit p einer beliebigen Zugfolge an, die auf das Ergebnis „eine blaue, 3 rote und 4 grüne Kugeln werden gezogen“ führt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
D: Es werden eine blaue, 3 rote und 4 grüne Kugeln gezogen.

Lösungsvorschlag zum Pflichtteil

1. a) Der Graph von f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, denn es gilt:

$$f(-x) = -x \cdot e^{-(-x)^2} = -x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$$

b) Notwendige Bedingung für relative Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot x \cdot e^{-x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-2x^2) \cdot e^{-x^2} = 0 \qquad \text{da } e^{-x^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee \ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Anhand des Graphen erkennt man, dass nur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine relative Maximumstelle ist. Durch Einsetzen in f(x) erhält man:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot e}}$$

Die Koordinaten des Hochpunktes sind $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot e}}\right)$.

c) Es soll gelten:

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^{-a^2} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-a^2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -a^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad a = \sqrt{\ln(2)} \qquad \text{da } a > 0 \end{aligned}$$

2. Da die Übergangskurve in $P(-4\,|\,2)$ und $Q(2\,|\,-1)$ an die vorgegebenen Halbgeraden anschließen soll, muss für die Funktion g der Übergangskurve gelten:
$g(-4) = 2$ und $g(2) = -1$ (Diese Bedingungen sorgen für die Stetigkeit.)

Da die Übergangskurve in P und Q glatt anschließen soll, muss sie in P bzw. Q dieselbe Steigung besitzen wie die entsprechende Halbgerade. Es muss also für die Funktion g zusätzlich gelten:
$g'(-4) = -0{,}5$ und $g'(2) = 0$ (Diese Bedingungen sorgen für die Differenzierbarkeit.)

Da die Übergangskurve in P und Q krümmungsruckfrei anschließen soll, muss sie in P bzw. Q dieselbe Krümmung besitzen wie die entsprechende Halbgerade. Da beide Halbgeraden die Krümmung 0 besitzen, muss also zusätzlich gelten:

$g''(-4) = 0$ und $g''(2) = 0$ (Diese Bedingungen sorgen für die zweimalige Differenzierbarkeit.)

Wegen dieser 6 notwendigen Bedingungen benötigt man einen Ansatz mit 6 Formvariablen, also ein Polynom 5. Grades:

$g(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

3. a) Damit f(x) definiert ist, muss gelten:

$$
\begin{aligned}
& -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 6x + 9 \leq -8 + 9 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-3)^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |x-3| \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x - 3 \geq -1 \ \wedge\ x - 3 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x \geq 2 \ \wedge\ x \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & 2 \leq x \leq 4
\end{aligned}
$$

$\mathbb{D}_f = [2; 4]$

b) Untersuchung auf Schnittstellen:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = a \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{-x^2 + 6x - 8} = a \qquad \text{Für } a < 0 \text{ gibt es keine Schnittstelle.} \\
\underset{a \geq 0}{\Leftrightarrow}\quad & -x^2 + 6x - 8 = a^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 6x + 9 = -a^2 + 1 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-3)^2 = -a^2 + 1
\end{aligned}
$$

Damit es zwei Schnittstellen gibt, muss gelten:

$$-a^2 + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < 1 \quad \underset{(a \geq 0)}{\Leftrightarrow} \quad 0 \leq a < 1$$

Für alle $a \in [0; 1[$ besitzen die Kurve und die Gerade genau zwei Schnittpunkte.

4. a) $f'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \quad \underset{x > 0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2} = x$

Damit ist $x = \frac{1}{2}$ die einzige Stelle, an der Ableitung und Funktionswert übereinstimmen.

b) Eine Gerade, die durch $S(0|1)$ und $P(x_0|f(x_0))$ verläuft, besitzt den y-Achsenabschnitt 1 und hat die Steigung $\frac{f(x_0) - 1}{x_0}$. Ihre Gleichung hat also die Form $y = \frac{f(x_0) - 1}{x_0} \cdot x + 1$.

9. a) Ereignis A:
Es gibt 3 Möglichkeiten, genau 2 rote Kugeln zu ziehen:
$r - r - \overline{r};\ r - \overline{r} - r;\ \overline{r} - r - r$
Damit folgt:
$$P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot 3 = \frac{3}{10}$$

Alternative 1:
Von den 4 roten Kugeln werden 2 gezogen. Die andere kann entweder eine blaue oder eine grüne Kugel sein.
$$P(A) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{0} + \binom{1}{0} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 5}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

Alternative 2:
Von den 4 roten Kugeln werden 2 gezogen. Die blauen und grünen Kugeln können zusammengefasst werden. Es sind also insgesamt 6 Kugeln, die nicht rot sind, von denen eine gezogen wird.
$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

Ereignis B:
Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten, eine blaue, eine rote und eine grüne Kugel zu ziehen:
$$P(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot 6 = \frac{1}{6}$$

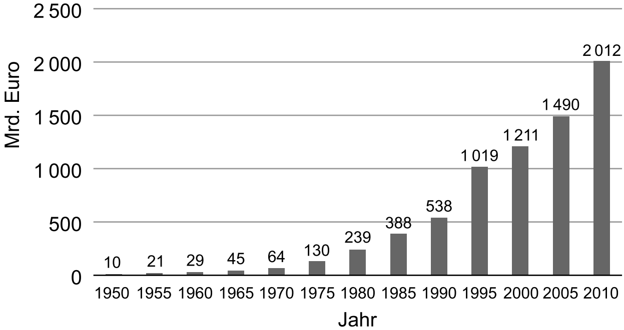
Alternativ:
$$P(B) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 5}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Ereignis C:
Es können 3 rote oder 3 grüne Kugeln gezogen werden:
$$P(C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{60}$$

Alternativ:
$$P(C) = \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0} + \binom{1}{0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 10}{120} = \frac{14}{120} = \frac{7}{60}$$

Wahlteil (CAS / GTR) – Aufgabe 1 B

Die Grafik stellt den Schuldenstand Deutschlands in Mrd. Euro jeweils zu Beginn des Jahres ab dem Jahr 1950 dar.

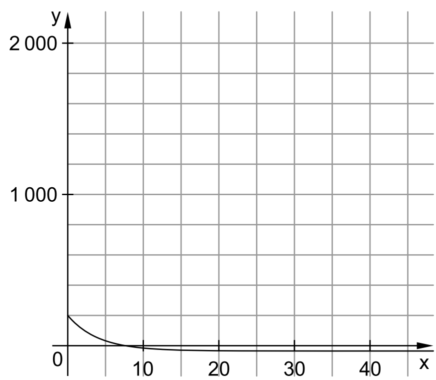


Punkte

a) Geben Sie die beiden Fünfjahreszeiträume an, in denen sich die Schulden mindestens verdoppelt haben. 2

b) Bestimmen Sie zwei geeignete Regressionsfunktionen.
Beurteilen Sie die von Ihnen gewählten Regressionsfunktionen hinsichtlich ihrer Eignung zur Beschreibung des vorliegenden Sachverhalts. 9

In einem Modell soll der Anstieg des Schuldenstands gestoppt werden und die Schulden sollen abgebaut werden. Zu Beginn des Jahres 2005 beträgt der Schuldenstand in diesem Modell 1 490 Mrd. Euro. Die Änderungsrate des Schuldenstands soll ab Beginn des Jahres 2005 durch die Funktion g mit $g(x) = 235 \cdot e^{-0,25x} - 35$,



x in Jahren ab dem Jahr 2005, g(x) in Mrd. Euro pro Jahr, beschrieben werden. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g.
(**GTR-Variante:** Eine Stammfunktion zu g lautet: $G(x) = -940 \cdot e^{-0,25x} - 35 \cdot x$)

c) Begründen Sie, dass der nach diesem Modell erwartete Schuldenstand in Mrd. Euro zu Beginn des Jahres 2025 mit dem folgenden Term bestimmt werden kann:

$$1\,490 + \int_0^{20} g(x)\,dx$$ 3

d) Skizzieren Sie in das Koordinatensystem den nach diesem Modell ungefähr zu erwartenden Schuldenstand vom Beginn des Jahres 2005 bis zum Jahr 2045. 4

e) Berechnen Sie für dieses Modell das Jahr, in dem der erwartete Schuldenstand genauso hoch ist wie zu Beginn des Jahres 2005. 4

f) Bestimmen Sie den maximalen Schuldenstand sowie das Jahr, in dem dieser erreicht wird. 3

Unabhängig vom Sachkontext ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktionenschar h_a mit $h_a(x) = (1 - a \cdot x) \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}$, $a \in \mathbb{R}$, gegeben.

(**GTR-Variante:** Ohne weiteren Nachweis können Sie verwenden: $h_a'(x) = a \cdot (1 - 2 \cdot a \cdot x) \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}$)

g) Zeigen Sie für $a \neq 0$, dass der maximale Funktionswert unabhängig vom Wert von a ist. 4

h) Für jeden Wert von a für $a \neq 0$ wird die Gerade durch den Schnittpunkt mit der x-Achse und den Hochpunkt des zugehörigen Graphen zu h_a betrachtet.
Für alle diese Geraden gilt: Sie schneiden sich in einem Punkt auf der y-Achse.
Bestimmen Sie die y-Koordinate dieses gemeinsamen Punktes auch mithilfe einer Skizze ohne Berechnung der Geradengleichungen. 6

i) Berechnen Sie alle Werte von a, für die der Graph der Ableitungsfunktion h_a' vollständig unterhalb (**GTR-Variante:** oder oberhalb) des Graphen der Funktion h_a liegt. 5

40

TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil (CAS / GTR) – Aufgabe 1 B

Teilaufgabe a

Angeben der beiden Fünfjahreszeiträume

Die Schuldenstände sind jeweils oberhalb der Säulen angegeben.

Beachten Sie, dass Sie Fünfjahreszeiträume und nicht Jahreszahlen angeben.

Teilaufgabe b

Bestimmen von zwei geeigneten Regressionsfunktionen

Geben Sie alle Daten unter **Lists&Spreadsheet** in den Rechner ein.

Lassen Sie anschließend unter **Data&Statistics** die Datenpaare grafisch darstellen.

Der Verlauf der Datenpunkte lässt ein mehr als lineares Wachstum vermuten.

Wählen Sie im Menu „Analysieren“ unter „Regression“ zwei geeignet erscheinende Regressionsmodelle aus und lassen Sie die zugehörigen Kurven vom Rechner zeichnen.

Der Rechner gibt auch die zugehörigen Funktionsgleichungen an.

Notieren Sie diese Gleichungen der beiden Regressionskurven und die Art der Regression.

Beurteilen der gewählten Regressionsfunktionen

Beschreiben Sie zunächst, in welchen Bereichen die Regressionskurven gut oder weniger gut die Datenpaare darstellen. Je nach Auswahl der Regressionsform ergeben sich hier unterschiedliche Aussagen zur Güte der Kurven. Auffällig dürfte aber der Wert für 1995 sein.

Sie können auch numerisch die Güte der Regression bewerten.

Hierzu bietet der Rechner die Gütemaße r bzw. r^2 an.

Sie erhalten diese Werte, wenn Sie unter **Lists&Spreadsheet** die Regressionen durchführen lassen.

Je näher diese Werte bei 1 liegen, umso besser ist die Kurvenanpassung gelungen.

Teilaufgabe c

Begründen des angegebenen Terms

Erläutern Sie exakt die Bedeutung des Integrals. In dem einleitenden Text sind dazu alle notwendigen Informationen vorhanden.

Beachten Sie, dass durch Integration über die Änderungsrate ein Bestand wird.

Dieser Bestand wird zu 1 490 addiert.

Formulieren Sie, was dann die Bedeutung der Summe ist.

Teilaufgabe d

Skizzieren des Schuldenstands

Beachten Sie, dass die Kurve im Punkt $P(0\,|\,1\,490)$ beginnen muss.

Die Nullstelle des vorhandenen Graphen von g legt den Extrempunkt in der Skizze fest.

Ab der Nullstelle ist g(x) negativ und relativ konstant. Damit wird die Steigung Ihres skizzierten Graphen festgelegt.

Sie können den Term auch in den Rechner eingeben und nach einer passenden Fenstereinstellung den Graphen in die Abbildung einzeichnen.

Teilaufgabe e

Berechnen des Jahres

Überlegen Sie, welchen Wert das Integral haben muss, damit die Forderung erfüllt ist.

Mit dem Rechner können Sie die passende obere Grenze des Integrals bestimmen.

Sie erhalten so die Zeit, die seit 2005 vergangen sein muss.

Formulieren Sie einen Antwortsatz, in dem Sie das zugehörige Jahr angeben.

Teilaufgabe f

Bestimmen des maximalen Schuldenstands und des zugehörigen Jahres

Berechnen Sie mit dem Rechner die Nullstelle von g(x).

Mit dieser können Sie das entsprechende Jahr und den maximalen Schuldenstand bestimmen.

Teilaufgabe g

Zeigen der Unabhängigkeit des Maximums von a

Laut Textvorgaben gibt es für $a \neq 0$ genau einen maximalen Funktionswert.

Mithilfe der ersten Ableitung können Sie die entsprechende Stelle finden.

Berechnen Sie den Wert an dieser Stelle.

Formulieren Sie nach dem Berechnen des Funktionswertes einen Antwortsatz.

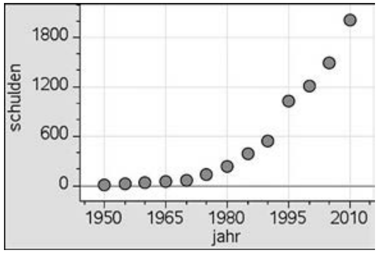
Lösungsvorschlag zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 B

a) Angeben der beiden Fünfjahreszeiträume:
Von 1950 bis 1955 und von 1970 bis 1975 haben sich die Schulden mindestens verdoppelt.

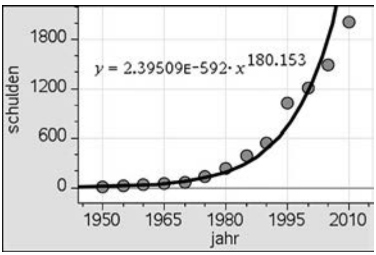
b Bestimmen von zwei geeigneten Regressionsfunktionen:

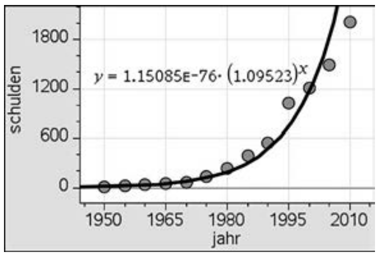
	A jahr	B schuld...	C	D
=				
1	1950	10		
2	1955	21		
3	1960	29		
4	1965	45		
5	1970	64		

A jahr



Wegen der Anordnung der Datenpaare scheint sowohl eine potenzielle als auch eine exponentielle Regression geeignet zu sein.





Nach Berücksichtigung aller gegebenen Datenpaare liefert der Rechner die folgenden Funktionsgleichungen:

Potenzielle Regression: $y \approx 2{,}40 \cdot 10^{-592} - 592 \cdot x^{180{,}15}$

Exponentielle Regression: $y \approx 1{,}15 \cdot 10^{-76} \cdot 1{,}09523^{x}$

Beurteilen der gewählten Regressionsfunktionen:
Augenscheinlich scheinen beide Regressionskurven für die Werte bis 1990 ähnlich gut geeignet zu sein. Der Ausreißer im Jahr 1995 (möglicherweise Kosten im Zusammenhang mit der Wiedervereinigung) ist auffällig. Die Werte ab 2005 werden dann aber nicht mehr gut erfasst. Hier steigen beide Kurven zu stark an.

Betrachtet man die vom Rechner angebotenen Gütemaße r^2 (r), so stellt man fest, dass die Werte sehr nahe bei 1 liegen. Dies weist auf eine gute Annäherung hin.

Hierbei scheint die potenzielle Regression mit $r^2 \approx 0{,}9871$ ($r \approx 0{,}9935$) gegenüber $r^2 \approx 0{,}9864$ ($r \approx 0{,}9932$) bei der exponentiellen Regression etwas besser geeignet zu sein.

	A jahr	B schuld...	C	D
=				=PowerRe
2	1955	21	RegEqn	a*x^b
3	1960	29	a	2.39509...
4	1965	45	b	180.153
5	1970	64	r²	0.987088
6	1975	130	r	0.993523

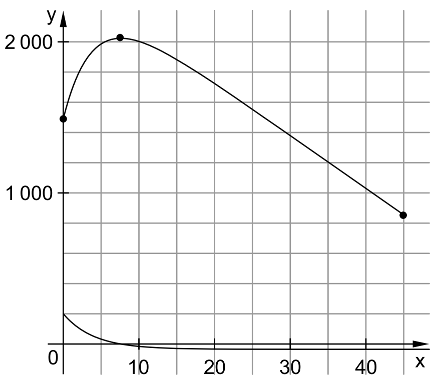
A2 1955

	C	D	E	F
=		=PowerRe		=ExpReg(
2	RegEqn	a*x^b	RegEqn	a*b^x
3	a	2.39509...	a	1.15085...
4	b	180.153	b	1.09523
5	r²	0.987088	r²	0.986423
6	r	0.993523	r	0.993188

F2 ="a· b^x"

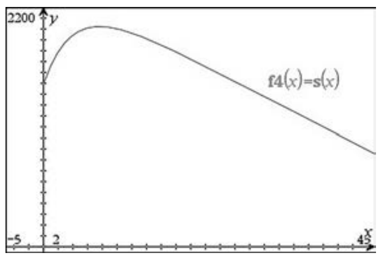
c) Begründen des angegebenen Terms:
Da die Funktion g ab 2005 die Änderung des Schuldenstands in Mrd. € pro Jahr angibt, gibt das Integral von g über dem Intervall [0; 20] die Gesamtzunahme der Schulden für die nächsten 20 Jahre an.
1 490 Mrd. € ist der Schuldenstand zu Beginn des Jahres 2005.
Die Summe gibt also den Schuldenstand zu Beginn des Jahres 2025 an.

d) Skizzieren des Schuldenstands:



$235 \cdot e^{-0.25 \cdot x} - 35 \rightarrow g(x)$ Fertig

$1490 + \int_0^x g(t)\, dt \,|\, x \geq 0 \rightarrow s(x)$ Fertig



e) Berechnen des Jahres:
Damit der Schuldenstand genauso hoch ist wie im Jahr 2005, muss gelten:

$$\int_0^a g(x)\,dx = 0 \text{ für ein bestimmtes } a > 0$$

$$\int_0^a g(x)\,dx = 0 \underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} a = 0 \vee a = 26{,}824\ldots$$

$\text{solve}\left(\int_0^a g(x)\,dx = 0, a\right)$

$a=0.$ or $a=26.8243$

Damit wird (im Laufe des Jahres) 2031 der Schuldenstand wieder den Stand von 2005 erreichen.