

Inhaltsverzeichnis

1	Historische Einführung und Zielstellung	1
2	Zum Wechselverhältnis von Wissenschaft, Theorie und Methode	7
2.1	Definition des Begriffes „Wissenschaft“	7
2.2	Beobachtung, Problem und Hypothese	10
2.3	Theorem, Methode, Theorie und Gesetz	12
2.4	Analyse, Synthese und Prinzip	16
2.4.1	Analyse und Synthese	16
2.4.2	Das Prinzip	17
3	Anwendungen zu Feldern und elektrischen Netzwerken	21
3.1	Hamilton-Prinzip und Lagrange-Formalismus	21
3.2	Beispiele aus Elektrotechnik, Mechanik und Elektromechanik	22
3.2.1	Bewegung einer Ladung im elektromagnetischen Feld	22
3.2.2	Der harmonische mechanische Oszillator	28
3.2.3	Das Kondensatormikrophon als elektromechanisches System	29
3.2.4	Euler-Lagrange-Gleichung und Duffingsches Problem	32
3.2.5	Elemente höherer Ordnung und ihr $\{L, D\}$ -Modell	34
3.2.6	Aufstellung der nichtkonservativen Hamilton-Funktion für ein elektrisches Netzwerk	37
3.3	Zusammenfassung	41
4	Variationsrechnung, Tensoren, Fourier-Reihen und Distributionen	43
4.1	Variationsrechnung	43
4.1.1	Aufgabenstellung	43
4.1.2	Notwendige Bedingungen für Extrema bei Funktionalen, die die Ableitung der gesuchten Funktion bis zur 1. Ordnung enthalten	47
4.1.3	Notwendige Bedingungen für Extrema bei Funktionalen, die die Ableitung der gesuchten Funktion bis zur Ordnung $n > 1$ enthalten	57
4.1.4	Fundamentallemma der Variationsrechnung und das Lemma von Du Bois-Reymond	61

4.2	Vektoren und Tensoren	63
4.2.1	Tensoren nullter und erster Stufe - Skalare und Vektoren	64
4.2.1.1	Basissysteme im \mathbf{E}^n und \mathbf{E}^3	65
4.2.1.2	Zerlegung von Vektoren über beliebigen Basen	68
4.2.1.3	Invarianz von Vektoren gegenüber Transformationen der Basis	69
4.2.1.4	Kovariante und kontravariante Basissysteme	69
4.2.1.5	Die metrischen Koeffizienten	71
4.2.1.6	Kontravariante und kovariante Koordinaten eines Vektors	72
4.2.1.7	Transformation der Koordinaten bei Basiswechsel	75
4.2.1.8	Darstellungen des Skalar- und Vektorproduktes	79
4.2.1.9	Orthogonale Basissysteme	81
4.2.2	Tensoren höherer Stufe	82
4.2.2.1	Tensoren zweiter und p -ter Stufe	82
4.2.2.2	Rechenoperationen für Tensoren	87
4.2.3	Tensoren im euklidischen Raum	92
4.2.3.1	Der n -dimensionale euklidische Vektorraum \mathbf{E}^n	93
4.2.3.2	Orthonormierte Basisvektoren	96
4.2.3.3	Tensoren im E^n	97
4.2.3.4	Orthonormierte Transformationen	98
4.2.3.5	Die Hauptachsentransformation eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe	100
4.2.3.6	Die Koordinatenarten eines Tensors	102
4.2.4	Tensoranalysis im Euklidischen Raum	103
4.2.4.1	Geradlinige Koordinaten	104
4.2.4.2	Krummlinige Koordinaten	107
4.2.4.3	Tensoren in krummlinigen Koordinaten	109
4.2.4.4	Parallelverschiebung, absolutes Differential, kovariante Ableitung	111
4.2.4.5	Krummlinige Koordinaten im euklidischen Raum	114
4.2.4.6	Die Christoffelsymbole	116
4.2.4.7	Der Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten	118
4.2.4.8	Umrechnung von Gradient, Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten	120
4.2.4.9	Differentiation von Tensoren zweiter und höherer Stufe	123
4.3	Fourierreihen	126
4.3.1	Periodische Funktionen	127
4.3.2	Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten	127
4.3.3	Beispiele für Fourier-Reihen	130

4.3.4	Die Besselsche Ungleichung	134
4.3.5	Zur komplexen Schreibweise von Fourier-Reihen	134
4.4	Distributionen - Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffes . . .	136
4.4.1	Motivation, Beispiel und Definition	136
4.4.2	Stetige Funktionen und Distributionen	143
4.4.3	Das Rechnen mit Distributionen	146
4.4.3.1	Algebraische Grundoperationen	146
4.4.3.2	Differentiation und Beispiele	147
4.5	Die Fourier- und Laplace-Transformation	149
4.5.1	Die Fouriertransformation	150
4.5.2	Die Laplace-Transformation	153
5	Wirkungsintegral und Maxwellsche Gleichungen	159
5.1	Ereignisse in Raum und Zeit	161
5.1.1	Koordinatensysteme	161
5.1.2	Spezielles Relativitätsprinzip	161
5.1.3	Ereignis und Bezugssystem	162
5.1.4	Abstand zwischen zwei Ereignissen	165
5.1.5	Die Eigenzeit	168
5.2	Lorentz-Transformation	170
5.2.1	Herleitung der Transformation	170
5.2.2	Galilei-Transformation	174
5.2.3	Umkehrtransformation	176
5.3	Tensoren in Bezugssystemen	176
5.3.1	Vierertensoren oder Vierervektoren	176
5.3.2	Lichtausbreitung in Bezugssystemen	179
5.3.3	Invarianz des Lichtkegels	180
5.3.4	Vierergradient des skalaren elektrischen Potentials	182
5.3.5	Die Vierergeschwindigkeit	184
5.4	Das Wirkungsintegral	185
5.4.1	Wirkungsintegral des Feldes	186
5.4.2	Wirkungsintegral eines freien Teilchens	187
5.4.3	Wirkungsintegral infolge der Wechselwirkung zwischen Feld und Teilchen	189
5.5	Lagrange-Funktionen der Wirkungsintegrale	191
5.5.1	Lagrange-Funktion einer Ladung im elektromagnetischen Feld . . .	191
5.5.2	Der Feldtensor und die Berechnung von Invarianten	191
5.5.2.1	Der Tensor des elektromagnetischen Feldes	191
5.5.2.2	Invarianten des elektromagnetischen Feldes	195

5.5.3	Dreidimensionales Wirkungsintegral	197
5.5.4	Gesamtwirkungsintegral von Feld und Ladungen	198
5.5.5	Die Lagrange-Funktion des Gesamtwirkungsintegrals	198
5.6	Die Grundgleichungen der Elektromagnetik	199
5.6.1	Die erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen	200
5.6.2	Die zweite Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen	202
5.6.2.1	Vierertensoren der Stromdichte	202
5.6.2.2	Herleitung der zweiten Gleichungsgruppe aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung	203
5.7	Besonderheiten der Maxwell'schen Gleichungen	207
5.8	Gesamt-Wirkungsintegral und Gesamt-Lagrange-Funktion	208
5.9	Die drei- und vierdimensionalen Formen der Kontinuitätsgleichung	209
5.10	Dimensionen und Bezeichnung der Feldgrößen	212
5.10.1	Dimension der drei- und vierdimensionalen Feldgrößen	212
5.10.2	Die Feldgrößen der Elektromagnetik	213
5.11	Die Eichinvarianz	214
5.12	Gliederung elektromagnetischer Felder	216
5.12.1	Die Gliederung nach den Materialeigenschaften	216
5.12.2	Die Gliederung nach dem Zeitverhalten	217
5.12.2.1	Statische Felder	217
5.12.2.2	Stationäre Felder	217
5.12.2.3	Quasistationäre Felder	218
5.12.2.4	Rasch veränderliche elektromagnetische Felder	218
5.13	Aufgaben	218
6	Tensoren der Elektromagnetik	229
6.1	Tensor des elektromagnetischen Feldes	230
6.2	Energieströmung, Leistungsbilanz und Poynting-Vektor	231
6.3	Der Energie-Impuls-Tensor	238
6.3.1	Energie-Impuls-Tensor, Prinzip der kleinsten Wirkung	238
6.3.2	Die Koordinaten des Energie-Impuls-Tensors	242
6.3.3	Der Energie-Impuls-Tensor der Elektromagnetik	245