

# Table des matières

<b>1 - PROLÉGOMÈNES : LA SEMICONTINUITÉ INFÉRIEURE ; LES TOPOLOGIES FAIBLES ; - RÉSULTATS FONDAMENTAUX D'EXISTENCE EN OPTIMISATION.</b>	<b>1</b>
1 Introduction	1
2 La question de l'existence de solutions	1
2.1 La semicontinuité inférieure	2
2.2 Des exemples	5
2.3 Un résultat standard d'existence	8
3 Le choix des topologies. Les topologies faibles sur un espace vectoriel normé.	10
3.1 Progression dans la généralité des espaces de travail	10
3.2 Topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur $E$	12
3.3 Le topologie faible-*, $\sigma(E^*, E)$ (weak-* en anglais)	13
3.4 L'apport de la séparabilité	16
3.5 Un théorème fondamental d'existence en présence de convexité.	16
Références	24
<b>2 CONDITIONS NÉCESSAIRES D'OPTIMALITÉ APPROCHÉE</b>	<b>25</b>
1 Condition nécessaire d'optimalité approchée ou principe variationnel d'Ekeland.	26
1.1 Le théorème principal : énoncé, illustrations, variantes	26
1.2 La démonstration du théorème principal	30
1.3 Compléments	34
2 Condition nécessaire d'optimalité approchée ou principe variationnel de Borwein-Preiss	37
2.1 Le théorème principal : énoncé, quelques illustrations	37

2.2	Applications en théorie de l'approximation hilbertienne . . .	42
3	Prolongements possibles . . . . .	53
	Références . . . . .	58
<b>3</b>	<b>-AUTOUR DE LA PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ; -LA DÉCOMPOSITION DE MOREAU.</b> . . . . .	<b>59</b>
1	Le contexte linéaire : la projection sur un sous-espace vectoriel fermé (Rappels) . . . . .	60
1.1	Propriétés basiques de $p_V$ . . . . .	60
1.2	Caractérisation de $p_V$ . . . . .	60
1.3	La "technologie des moindres carrés" . . . . .	61
2	Le contexte général : la projection sur un convexe fermé (Rappels) . . . . .	62
2.1	Caractérisation et propriétés essentielles . . . . .	63
2.2	Le problème de l'admissibilité ou faisabilité convexe (the "convex feasibility problem") . . . . .	65
3	La projection sur un cône convexe fermé. La décomposition de MOREAU . . . . .	68
3.1	Le cône polaire . . . . .	68
3.2	Caractérisation de $p_K(x)$ ; propriétés de $p_K$ ; décomposition de Moreau suivant $K$ et $K^\circ$ . . . . .	72
4	Approximation conique d'un convexe. Application aux conditions d'optimalité . . . . .	77
4.1	Le cône tangent . . . . .	77
4.2	Application aux conditions d'optimalité . . . . .	80
	Références . . . . .	84
<b>4</b>	<b>ANALYSE CONVEXE OPÉRATEUR</b> . . . . .	<b>85</b>
1	Fonctions convexes sur $E$ . . . . .	86
1.1	Définitions et propriétés . . . . .	86
1.2	Exemples . . . . .	88
2	Deux opérations préservant la convexité . . . . .	91
2.1	Passage au supremum . . . . .	91
2.2	Inf-convolution . . . . .	91
3	La transformation de Legendre-Fenchel . . . . .	95
3.1	Définition et premières propriétés . . . . .	95
3.2	Quelques exemples pour se familiariser avec le concept . . . . .	96
3.3	L'inégalité de Fenchel . . . . .	98
3.4	La biconjugaison . . . . .	98
3.5	Quelques règles de calcul typiques . . . . .	99
4	Le sous-différentiel d'une fonction . . . . .	100
4.1	Définition et premiers exemples . . . . .	100
4.2	Propriétés basiques du sous-différentiel . . . . .	102

4.3	Quelques règles de calcul typiques . . . . .	105
4.4	Sur le besoin d'un agrandissement de $\partial f$ . . . . .	108
5	Un exemple d'utilisation du sous-différentiel : les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans un problème d'optimisation convexe avec contraintes. . . . .	108
	Références . . . . .	116
<b>5</b>	<b>QUELQUES SCHÉMAS DE DUALISATION DANS DES PROBLÈMES D'OPTIMISATION NON CONVEXES . . . . .</b>	<b>117</b>
1	Modèle 1 : la relaxation convexe. . . . .	118
1.1	L'opération de "convexification fermée" d'une fonction . . . . .	118
1.2	La "relaxation convexe fermée" d'un problème d'optimisation ( $\mathcal{P}$ ) . . . . .	119
2	Modèle 2 : convexe + quadratique. . . . .	125
3	Modèle 3 : diff-convexe . . . . .	129
	Références . . . . .	140
<b>6</b>	<b>SOUS-DIFFÉRENTIELS GÉNÉRALISÉS DE FONCTIONS NON DIFFÉRENTIABLES . . . . .</b>	<b>141</b>
1	Sous-différentiation généralisée de fonctions localement Lipschitz . . . . .	142
1.1	Dérivées directionnelles généralisées et sous-différentiels généralisés au sens de CLARKE: Définitions et premières propriétés . . . . .	144
1.2	Sous-différentiels généralisés au sens de CLARKE: Règles de calcul basiques. . . . .	150
1.3	Un exemple d'utilisation des sous-différentiels généralisés : les conditions nécessaires d'optimalité dans un problème d'optimisation avec contraintes . . . . .	153
1.4	En route vers la géométrie non lisse . . . . .	156
2	Sous-différentiation généralisée de fonctions s.c.i. à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . . . . .	158
2.1	Un panel de sous-différentiels généralisés . . . . .	158
2.2	Les règles de va-et-vient entre Analyse et Géométrie non lisses. . . . .	161
	Références . . . . .	166
	<b>Index . . . . .</b>	<b>169</b>