

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$	5
1.1 Natürliche Zahlen	5
1.2 Ganze Zahlen	9
1.3 Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$	11
1.4 Brüche und Rationale Zahlen	13
1.5 Division mit Rest	15
1.6 Gekürzte Brüche	18
1.7 Vollständige Induktion	19
1.8 Die vollständige Ganz-Abgeschlossenheit von $\mathbb{Z}$	23
2 Primzahlen	27
2.1 Primzahlen	28
2.2 Fundamentalsatz der Zahlentheorie	31
2.3 Euklidischer Algorithmus	36
2.4 Lineare Kongruenzen und Eulersche φ -Funktion	46
2.5 Lineare diophantische Gleichungen	61
2.6 Fermatsche und mersennesche Zahlen	71
2.7 Vollkommene Zahlen	77
3 Die Zahlbereiche $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$	85
3.1 Reelle Zahlen	85
3.2 Komplexe Zahlen	96
3.3 Algebraische und transzendente Zahlen	102
3.4 Spezielle algebraische Zahlen	113
3.5 k-adische Brüche	115
3.6 Kettenbruchdarstellungen	123
3.6.1 Allgemeine Kettenbrüche	124
3.6.2 Reguläre Kettenbrüche	131
3.7 Irrationalitätsbeweise	159
3.8 Transzendenzbeweis von e	164

4	Zahlentheoretische Funktionen	169
4.1	Multiplikative und additive Funktionen	169
4.1.1	Beispiele zahlentheoretischer Funktionen	170
4.1.2	Multiplikative zahlentheoretische Funktionen	172
4.1.3	Additive zahlentheoretische Funktionen	173
4.1.4	Primzahlunabhängige zahlentheoretische Funktionen	174
4.1.5	Summatorische Funktionen	175
4.2	Die Teilerfunktionen	178
4.3	Dirichlet-Faltung	185
4.4	Dirichletsche Reihen	193
4.5	Eulersche Summenformel	200
4.5.1	Landausche Ordnungssymbole	200
4.5.2	Endliche Summen	203
4.5.3	Eulersche Summenformel	207
4.6	Riemannsche Zetafunktion	209
4.7	Möbiussche μ -Funktion	214
4.8	Mittelwerte und Größenordnungen	217
5	Quadratische und höhere Kongruenzen	229
5.1	Primitive Wurzeln	229
5.2	Indexrechnung	240
5.3	Quadratische Kongruenzen	245
5.4	Darstellungen von Zahlen als Quadratsummen	263
5.5	Höhere Kongruenzen	270
6	Zwei-Personen-Spiele mit Zahlen	287
6.1	Subtraktions-Spiele	287
6.1.1	Das 1-2-Subtraktions-Spiel	288
6.1.2	Rückwärts-Analyse	291
6.1.3	Struktur: Perioden und Vorperioden	294
6.1.4	Spiele-Familien mit langen Perioden und Vorperioden	295
6.2	Das Nim-Spiel und Boutons Strategie	305
6.2.1	Die Strategie von Bouton	306
6.2.2	Die Rache des Verlierers	309
6.3	Subtraktions-Spiele mit anderen Zugreihenfolgen	310
6.3.1	A-A-B-A-B-A-A-B-A-B-...	310
6.3.2	Die Macht der häufigeren Alice	315
7	Drei moderne Spiele: Über Zahlen – Würfel – Schildkröten	321
7.1	Letzter Mann voran	323

7.2	EinStein würfelt nicht	331
7.3	Karls Rennen	339
7.4	Die drei Spiele im Vergleich	347
Anhang		349
	Relationen	349
	Algebraische Strukturen	350
	Elemente der Analysis	352
	RSA-Algorithmus	354
Lösungshinweise und Lösungen		357
	Kapitel 1	357
	Kapitel 2	358
	Kapitel 3	360
	Kapitel 4	364
	Kapitel 5	366
	Kapitel 6	368
Literaturverzeichnis		371
Symbolverzeichnis		377
Index		379