Inhaltsverzeichnis

1 Algebra in der Schule	1
1.1 Was ist Algebra in der Schule?	1
1.1.1 Algebra als Formelsprache	2
1.1.2 Algebra als Werkzeug	4
1.1.3 Algebra als Denkweise	7
1.2 Warum Algebra in der Schule?	11
1.2.1 Lernziele, Kompetenzen und Leitideen	11
1.2.2 Allgemeine Ziele des Algebraunterrichts	15
1.3 Inhalte der Schulalgebra	20
1.4 Algebra unterrichten	21
1.4.1 Begriffsverständnis	23
1.4.2 Prinzip der Vielfalt und Vernetzung der Darstellungsformen (insbesondere das „E-I-S-Prinzip“)	24
1.4.3 Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen	24
1.4.4 Prinzip der Anwendungsorientierung	26
1.4.5 Prinzip des adäquaten Einsatzes digitaler Technologien	27
1.5 Zusammenfassung	29
1.6 Aufgaben	29
2 Variablen	33
2.1 Fachliche Analyse	34
2.1.1 Der Variablenbegriff in der Algebra zu Beginn der Sekundarstufe	34
2.1.2 Grundvorstellungen des Variablenbegriffs	35
2.1.3 Historisch-genetische Entwicklung der Algebra	37
2.1.4 Was kennzeichnet den Übergang von der Arithmetik zur Algebra?	39
2.2 Variablen verstehen	41
2.2.1 Den Grundbegriff Variable erwerben	42

2.2.2	Zentrale Entwicklungslinien beim Aufbau eines Variablenverständnisses	43
2.2.3	Zusammenfassung	50
2.3	Zentrale didaktische Handlungsfelder	50
2.3.1	Aufbau von Variablenvorstellungen nach dem genetischen Prinzip bzw. dem Prinzip des inhaltlichen Denkens vor Kalkül	51
2.3.2	Darstellungsvernetzung und -verkürzung nach dem E-I-S-Prinzip	54
2.3.3	Formalisierung nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung	57
2.3.4	Zusammenfassung	57
2.4	Variablenvorstellungen im Unterricht anbahnen	58
2.4.1	Die Variable als Unbestimmte verstehen	58
2.4.2	Die Variable als Unbekannte verstehen	63
2.4.3	Die Variable als Veränderliche verstehen	67
2.4.4	Zusammenfassung	73
3	Terme	77
3.1	Fachliche Analyse	78
3.1.1	Die Formelsprache als formale Sprache	78
3.1.2	Die Relevanz von Termen oder: „Wozu sind Terme da?“	80
3.1.3	Regeln und Regelhierarchien	82
3.1.4	Anschaulichkeit und Abstraktion bei Termen	84
3.1.5	Terme und ihre Entwicklung im historischen Überblick	85
3.1.6	Zusammenfassung	87
3.2	Terme verstehen	87
3.2.1	Ziele beim Lernen der Formelsprache	87
3.2.2	Grundvorstellungen zum Termbegriff	90
3.2.3	Termumformungen	94
3.2.4	Termumformungen und digitale Technologien	98
3.3	Zentrale didaktische Handlungsfelder	102
3.3.1	Konstrukt des Struktursehens	103
3.3.2	Fehler und das didaktische Prinzip des Lernens aus Fehlern	106
3.3.3	Produktive Übungsaufgaben für Termumformungen	110
3.4	Die Formelsprache im Unterricht	112
3.4.1	Zugang zu Termen durch inhaltliches Denken	113
3.4.2	Anbahnen von Termumformungen	120
3.4.3	Erweiterung der Formelsprache	124
4	Funktionen	131
4.1	Fachliche Analyse	132
4.1.1	Darstellungen von Funktionen	132

4.1.2	Die Vielfalt der Funktionen im Mathematikunterricht	136
4.1.3	Die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs	138
4.1.4	Aspekte des Funktionsbegriffs.	139
4.2	Funktionen verstehen	141
4.2.1	Ein Lernmodell zum Funktionsbegriff.	142
4.2.2	Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff	144
4.2.3	Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen beim Lernen	146
4.2.4	Funktionales Denken	147
4.2.5	Das operative Prinzip und das funktionale Denken	153
4.2.6	Zusammenfassung	155
4.3	Zentrale didaktische Handlungsfelder	155
4.3.1	Zugänge zum Funktionsbegriff	155
4.3.2	Entdecken neuer Funktionstypen	162
4.3.3	Modellbilden mit Funktionen.	167
4.3.4	Umkehrfunktionen	170
4.3.5	Funktionen und Relationen	172
4.3.6	Mit Funktionen operieren.	173
4.3.7	Funktionen dynamisch analysieren	178
4.3.8	Werte annähern – Regressionskurven	183
4.3.9	Funktionen mehrerer Veränderlicher	188
4.4	Funktionen unterrichten.	189
4.4.1	Proportionale und antiproportionale Funktionen	190
4.4.2	Lineare Funktionen	193
4.4.3	Quadratische Funktionen	201
4.4.4	Potenz- und Exponentialfunktionen.	211
4.4.5	Folgen – diskrete Funktionen.	216
4.4.6	Exponential- und Logarithmusfunktionen	223
4.4.7	Trigonometrische Funktionen	227
5	Gleichungen	235
5.1	Fachliche Analyse	236
5.1.1	Gleichungen in der Schulmathematik	236
5.1.2	Zum Begriff der Gleichung	239
5.1.3	Gleichungen als Aussage und Aussageform	239
5.1.4	Das Gleichheitszeichen	240
5.1.5	Definitions- und Lösungsmenge	241
5.1.6	Ungleichungen	242
5.1.7	Äquivalenz von Gleichungen und Äquivalenzumformungen	243
5.1.8	Äquivalenz von Ungleichungen und Äquivalenzumformungen.	246

5.1.9	Gleichungen lösen	247
5.1.10	Ungleichungen lösen	252
5.1.11	Gleichungen in der Geschichte der Mathematik	253
5.2	Gleichungen verstehen.	255
5.2.1	Das Gleichheitszeichen verstehen	255
5.2.2	Grundvorstellungen von Gleichungen	256
5.2.3	Das Lösen von Gleichungen verstehen	259
5.2.4	Verstehen im Kalkül.	262
5.2.5	Das Lösen von Ungleichungen verstehen	265
5.3	Zentrale didaktische Handlungsfelder	267
5.3.1	Die Identität als eine relationale Sichtweise des Gleichheitszeichens entwickeln.	267
5.3.2	Äquivalenzumformungen von Gleichungen anbahnen	270
5.3.3	Verstehen im Kalkül anbahnen	276
5.3.4	Gleichungen zielgerichtet aufstellen und Einsichten gewinnen	285
5.3.5	Schwierigkeiten beim Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen	286
5.4	Gleichungen unterrichten.	290
5.4.1	Lineare und quadratische Gleichungen	290
5.4.2	Gleichungssysteme.	294
5.4.3	Bruchgleichungen	299
5.4.4	Ungleichungen	302
5.4.5	Wurzelgleichungen	303
5.4.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades (≥ 3)	305
5.4.7	Exponentielle Gleichungen	309
5.4.8	Trigonometrische Gleichungen	313
5.4.9	Aufstellen von Kurvengleichungen	314
	Bisher erschienene Bände (Auswahl)	321
	Mathematik	322
	Literatur.	323
	Stichwortverzeichnis.	337