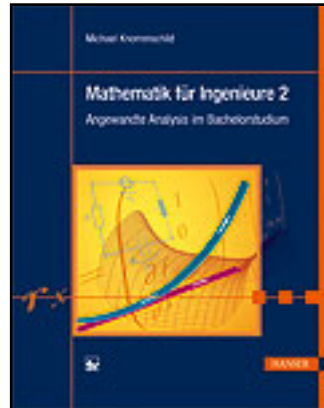




Leseprobe

Michael Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 2

Angewandte Analysis im Bachelorstudium

ISBN (Buch): 978-3-446-41347-4

ISBN (E-Book): 978-3-446-43269-7

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-41347-4>

sowie im Buchhandel.

Man sieht, es geht irgendwie um Vorzeichen, nämlich um das des Ausdrucks $\mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h}$. Zunächst ein Beispiel, damit wir sehen, wie dieser Ausdruck vom Typ her aussieht.

Beispiel 2.4

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Dann gilt mit $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h} &= -2h_1^2 - 2h_1 h_2 - 3h_2^2 &= -2(h_1^2 + h_1 h_2) - 3h_2^2 \\ &= -2(h_1 + \tfrac{1}{2}h_2)^2 + \tfrac{1}{2}h_2^2 - 3h_2^2 &= -2 \underbrace{(h_1 + \tfrac{1}{2}h_2)^2}_{\geq 0} - 2.5h_2^2 < 0 \end{aligned}$$

also ist $\mathbf{A}$ negativ definit. Hier haben wir die quadratische Ergänzung benutzt, und Sie bemerken erneut, wie nützlich diese Methode ist. ■

Das war etwas mühselig, wir wünschen uns natürlich einfache Kriterien für Definitheit, die wir leicht nachprüfen können. Im Zweidimensionalen gibt es das auch:

Kriterien für Definitheit für $k = 2$



Diese Kriterien gelten wirklich nur im Falle $k = 2$. Versuchen Sie nicht, etwas Ähnliches im Drei- oder Höherdimensionalen zu verwenden – so etwas gibt es nicht.

Satz 2.2

Sei $\mathbf{A}$ eine 2×2 -Matrix. Dann gilt:

- $\mathbf{A}$ ist positiv definit $\iff a_{11} > 0$ und $\det \mathbf{A} > 0$.
- $\mathbf{A}$ ist negativ definit $\iff a_{11} < 0$ und $\det \mathbf{A} > 0$.
- $\mathbf{A}$ ist indefinit $\iff \det \mathbf{A} < 0$.
- $\mathbf{A}$ ist positiv oder negativ semidefinit $\iff \det \mathbf{A} = 0$.

Die Überprüfung der Matrix aus Beispiel 2.4 ist damit ein Einzelner: $a_{11} = -2 < 0$ und $\det \mathbf{A} = 5 > 0$, also ist $\mathbf{A}$ negativ definit.

Hinreichende Kriterien für Extrema für $k = 2$

Falls $\mathbf{H}_f(x_0)$ nur semidefinit ist, kann in x_0 ein lokales Extremum vorliegen oder auch nicht. Es ist damit allein keine Aussage möglich.

Satz 2.3

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f zweimal stetig partiell differenzierbar. $x_0 \in D$ sei stationärer Punkt von f . Dann gilt:

- Wenn $\mathbf{H}_f(x_0)$ positiv definit ist, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- Wenn $\mathbf{H}_f(x_0)$ negativ definit ist, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.
- Wenn $\mathbf{H}_f(x_0)$ indefinit ist, dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt (also insb. kein Extremum).

Beispiel 2.5

1. Wir betrachten $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$, vgl. Beispiel 2.1. Dann ist $\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 2) \\ 2(y - 1) \end{pmatrix}$, also ist $(2, 1)$ die einzige stationäre Stelle und damit der einzige Kandidat für ein lokales Extremum. Die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit sogar für alle (x, y) (da $\det \mathbf{H}_f(x, y) = 4 > 0$ und $\mathbf{H}_{f_{11}}(x, y) = 2 > 0$). Damit ist natürlich auch $\mathbf{H}_f(2, 1)$ positiv definit. Nach Satz 2.3 liegt dann in $(2, 1)$ ein lokales Minimum vor, siehe Bild 2.2.

2. Wir ändern im vorigen Beispiel nur den Exponenten von 2 auf 4 und betrachten $f(x, y) = (x - 2)^4 + (y - 1)^4$. Auf das Erscheinungsbild des Graphen hat das kaum Einfluss, siehe Bild 2.4. Es liegt nach wie vor ein globales Minimum in $(2, 1)$ vor, was wir auch wie in Beispiel 2.1

nachweisen könnten. Dann ist $\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} 4(x - 2)^3 \\ 4(y - 1)^3 \end{pmatrix}$, also ist $(2, 1)$

die einzige stationäre Stelle von f und damit der einzige Kandidat für ein Extremum. Die Hesse-Matrix ist

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x - 2)^2 & 0 \\ 0 & 12(y - 1)^2 \end{pmatrix}, \text{ also } \mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv semidefinit, zugleich aber auch negativ semidefinit, Satz 2.3 greift also nicht und erlaubt keine Aussage, welche Situation nun in $(2, 1)$ vorliegt.

3. Wir betrachten $f(x, y) = (x - 2)^2 - (y - 1)^2$, vgl. Beispiel 2.3. Dann ist $\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 2) \\ -2(y - 1) \end{pmatrix}$, also ist $(2, 1)$ die einzige stationäre Stelle und damit der einzige Kandidat für ein lokales Extremum. Die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit sogar für alle (x, y) (da $\det \mathbf{H}_f(x, y) = -4 < 0$). Damit ist natürlich auch $\mathbf{H}_f(2, 1)$ indefinit. Nach Satz 2.3 liegt dann in $(2, 1)$ ein Sattelpunkt vor, siehe Bild 2.3.

4. Wir ändern im vorigen Beispiel nur den Exponenten von 2 auf 4 und betrachten $f(x, y) = (x - 2)^4 - (y - 1)^4$. Auf das Erscheinungsbild des Graphen hat das kaum Einfluss, siehe Bild 2.5. Es liegt nach wie vor ein Sattelpunkt in $(2, 1)$ vor, was wir auch wie in Beispiel 2.3 nachwei-

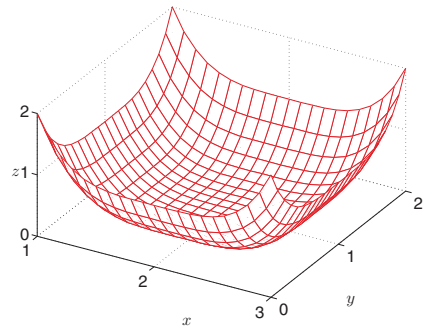


Bild 2.4 $f(x, y) = (x - 2)^4 + (y - 1)^4$:
Globales Minimum in $(2, 1)$

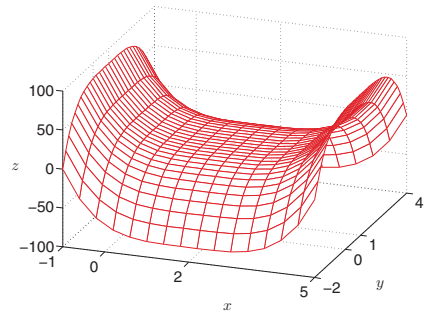


Bild 2.5 $f(x, y) = (x - 2)^4 - (y - 1)^4$:
Sattelpunkt in $(2, 1)$

sen könnten. Es ist $\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} 4(x-2)^3 \\ -4(y-1)^3 \end{pmatrix}$, also ist $(2, 1)$ die einzige stationäre Stelle von f und damit der einzige Kandidat für ein Extremum. Die Hesse-Matrix ist $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x-2)^2 & 0 \\ 0 & -12(y-1)^2 \end{pmatrix}$, also $\mathbf{H}_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist positiv und auch negativ semidefinit, Satz 2.3 erlaubt daher keine Aussage.

5. Wir haben schon die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x \ y) \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x \ y) \mathbf{b}$$

wobei $\mathbf{A}$ eine symmetrische 2×2 -Matrix ist, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ (siehe S. 29) betrachtet und in Aufgabe 1.3 nachgewiesen, dass

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbf{b}.$$

Die stationären Stellen sind also genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Die Hesse-Matrix lautet dann $\mathbf{H}_f(x, y) = \mathbf{A}$. Sei $\mathbf{x}$ die Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es gilt also:

Wenn $\mathbf{A}$ positiv definit ist, so liegt in $\mathbf{x}$ in Minimum vor.

Wir hatten (siehe S. 29) das Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

betrachtet. $\mathbf{A}$ ist positiv definit und $(1, 2)^T$ ist die Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Also liegt in $(x, y) = (1, 2)$ ein Minimum von f vor, was auch prima zu Bild 1.15 passt.

6. Wir betrachten $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y^2 - 2x$. Dann ist

$$\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2x - 2 \\ 2xy - 2y \end{pmatrix}.$$

(x, y) ist also stationäre Stelle, falls $y^2 - 2x - 2 = 0$ und $2xy - 2y = 0$. Letzteres bedeutet aber $2(x-1)y = 0$, also $x = 1$ oder $y = 0$. Wir benutzen $y^2 - 2x - 2 = 0$, um die fehlende Koordinate zu bestimmen: Für $x = 1$ ist $y^2 = 2x + 2 = 4$, also ist $y = \pm 2$, also sind $(1, 2)$ und $(1, -2)$ stationäre Stellen.

Für $y = 0$ ist $x = \frac{1}{2}(y^2 - 2) = -1$, also ist $(-1, 0)$ stationäre Stelle.

Festigung: Prüfen Sie nach, dass $\mathbf{A}$ positiv definit ist.

Wir haben also drei stationäre Stellen gefunden, nämlich $(1, 2)$, $(1, -2)$ und $(-1, 0)$, welche die Kandidaten für die Extrema darstellen. Es gibt keine weiteren Kandidaten, denn wir haben die beiden partiellen Ableitungen faktorisiert und alle Möglichkeiten, diese Null werden zu lassen, erfasst.

Die Hesse-Matrix lautet: $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{pmatrix}$, für die einzelnen stationären Stellen ergibt sich unter Benutzung von Satz 2.2:

für $(-1, 0)$: $\mathbf{H}_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, welche negativ definit ist, also liegt in $(-1, 0)$ ein lokales Maximum vor.

für $(1, 2)$: $\mathbf{H}_f(1, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, welche indefinit ist, also liegt in $(-1, 0)$ ein Sattelpunkt vor.

für $(1, -2)$: $\mathbf{H}_f(1, -2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, welche indefinit ist, also liegt in $(-1, 0)$ ein Sattelpunkt vor.

f besitzt also ein lokales Maximum in $(-1, 0)$ und zwei Sattelpunkte in $(1, \pm 2)$, siehe Bild 2.6. ■

! Bei der Suche nach Nullstellen der Ableitungen sollte stets faktorisiert werden. Beim voreiligen Kürzen dagegen werden oft Lösungen übersehen.

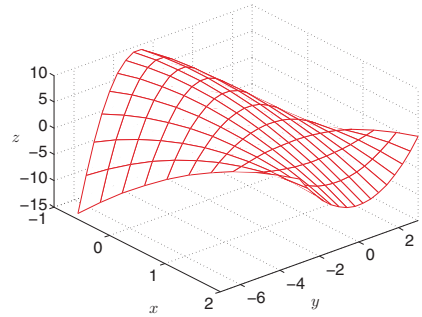


Bild 2.6 $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y^2 - 2x$: lokales Maximum in $(-1, 0)$ und zwei Sattelpunkte in $(1, \pm 2)$

2.2 Ausgleichsrechnung

Wir wollen nun eine spezielle, häufig auftretende Anwendung der Extremwertberechnung näher beleuchten. Dabei ist eine Anzahl Zahlenpaare (Daten), Typ (x, y) , gegeben, es ist aber keine Funktion f bekannt, sodass $f(x) = y$ wäre für alle Zahlenpaare. Eine solche Funktion sucht man nun. Dass der Graph der Funktion exakt durch die Zahlenpaare läuft, kann nicht erwartet werden. Zum einen sind die Daten in der Regel mit Messungenauigkeiten behaftet, zum anderen kennt man die Funktion nicht so genau, sondern hat nur mehr oder wenige brauchbare Vermutungen darüber. Die Situation ist also wie folgt: