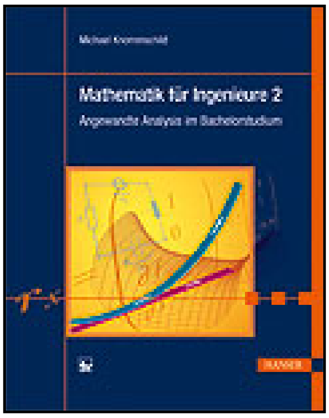
HANSER



Leseprobe

Michael Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 2

Angewandte Analysis im Bachelorstudium

ISBN (Buch): 978-3-446-41347-4

ISBN (E-Book): 978-3-446-43269-7

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-41347-4

sowie im Buchhandel.

Beispiel 5.12

Wir betrachten noch einmal (5.3) aus Newtons Abkühlungsgesetz:

$$y' = \alpha\,(y - T_L) \tag{5.3}$$

Wir definieren eine neue Funktion z durch $z := y - T_L$. Da z sich von y nur durch eine additive Konstante unterscheidet, gilt natürlich $z' = y'$. Wenn y die Differenzialgleichung (5.3) erfüllt, dann erfüllt z die Differenzialgleichung

$$z' = y' = \alpha\,(y - T_L) = \alpha z.$$

Das Umschreiben einer Differenzialgleichung mit einer neuen gesuchten Funktion kann die Berechnung der Lösung erleichtern.

Die Differenzialgleichung $z' = \alpha z$ ist aber leicht zu lösen, die allgemeine Lösung ist $z(t) = c\,\mathrm{e}^{\alpha t}$. Daraus können wir leicht y berechnen:

$$y(t) = z(t) + T_L = c\,\mathrm{e}^{\alpha t} + T_L.$$

Solche Substitutionen sind natürlich nur möglich, wenn man weiß, welche neue Funktion z günstig ist. Einfach ist, wenn Ihnen jemand sagt, welches z Sie nehmen sollten, wie es beispielweise in Übungsaufgaben der Fall ist. ■

↪ Aufgabe 5.4

Lösen von linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung

- Differenzialgleichung auf die Form $y'(t) = a(t)\,y(t) + f(t)$ bringen
- Zugehörige homogene Differenzialgleichung $y'(t) = a(t)\,y(t)$ lösen; Lösung ist $y(t) = c\,\mathrm{e}^{A(t)}$, wobei A eine(!) Stammfunktion von a ist.
- Variation der Konstanten: Ansatz $y(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$
- Ansatz in $y'(t) = a(t)\,y(t) + f(t)$ einsetzen, nach $c'(t)$ umstellen und nach t integrieren liefert $c(t)$.
- Dieses $c(t)$ in den Ansatz eingesetzt liefert die allgemeine Lösung von $y'(t) = a(t)\,y(t) + f(t)$. Diese enthält noch einen freien Parameter, der an einen Anfangswert angepasst werden kann.

5.2.5 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Anwendung – Mechanik: Lineares Federpendel

Wir suchen nach der Auslenkung $x(t)$ zum Zeitpunkt t. Hier halten sich zwei Kräfte die Waage: Zum einen $F_1(t) = m \cdot a(t)$, wobei $F_1(t)$ die nach links wirkende Kraft ist, m die bewegte Masse, $a(t)$ die Beschleunigung. Zum anderen wirkt dem die Rückholkraft $F_2(t)$ der Feder entgegen, $F_2(t)$ muss also negativ angesetzt werden, siehe Bild 5.5. Nach dem Hookeschen Gesetz (siehe Band 1, S. 169) gilt $F_2(t) = -k \cdot x(t)$, wobei k die Federkonstan-

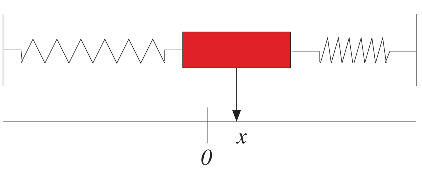


Bild 5.5 Horizontales Federpendel

te ist. Die Beschleunigung ist bekanntlich (siehe Band 1, S. 131) $a(t) = x''(t)$. Wir erhalten also:

$$F_1(t) = F_2(t) \iff m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t)$$

Dies ist eine Differenzialgleichung, in der neben der gesuchten Funktion x auch deren zweite Ableitung x'' auftritt.

Anwendung – Elektrotechnik: Schwingkreis

Ein Schwingkreis besteht aus einer Induktivität L, einer Kapazität C und einem Widerstand R in Reihe geschaltet, siehe Bild 5.6. Wir suchen den Strom $I(t)$. Wendet man die Kirchhoffsche Maschenregel an (die Spannungen entlang einer Masche addieren sich zu Null), so erhält man:

$$u_L + u_c + u_R = U_0, \text{ d. h. } L \cdot I' + u_c + R \cdot I = U_0$$

Durch Differenzieren erhalten wir:

$$L \cdot I'' + u_c' + R \cdot I' = U_0'$$

Wegen $C \cdot u_c' = i$ ist dies äquivalent zu:

$$L \cdot I'' + R \cdot I' + \tfrac{1}{C} \cdot I = U_0'$$

In dieser Differenzialgleichung tritt neben der gesuchten Funktion I und ihrer ersten Ableitung auch ihre zweite Ableitung I'' auf.

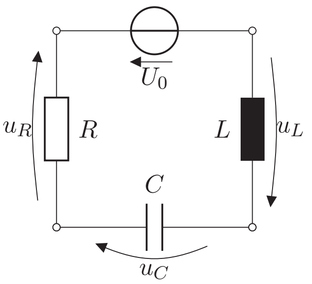


Bild 5.6 Schwingkreis

Definition 5.7

Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

Eine Differenzialgleichung der Form

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

heißt **lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Wenn $f(t) = 0$ konstant ist, heißt die Differenzialgleichung wie im Falle erster Ordnung **homogen**, sonst **inhomogen**. Ebenso ist

$$y'' + ay' + by = 0$$

die zugehörige homogene Differenzialgleichung. Das aus den konstanten Koeffizienten gebildete Polynom p mit

$$p(x) = x^2 + ax + b$$

heißt **charakteristisches Polynom** der Differenzialgleichung.

In Beispiel 5.2 haben wir schon eine solche Differenzialgleichung gelöst, nämlich $y'' = k$, und gesehen, dass die allgemeine Lösung zwei freie Parameter besitzt. Wir brauchen also zwei Zusatzbedingungen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. In Anwendungen treten folgende Varianten auf:

- Die Werte von y und y' zu Beginn des betrachteten Intervalls $[a, b]$ sind vorgegeben. Die Bedingungen lauten also
  $$y(a) = y_a,\ y'(a) = y'_a$$
  mit vorgegebenem y_a und y'_a. Zusammen mit der Differenzialgleichung liegt dann ein **Anfangswertproblem** vor.
- Die Werte von y am Anfang und am Ende des betrachteten Intervalls $[a, b]$ sind vorgegeben. Die Bedingungen lauten
  $$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$
  mit vorgegebenem y_a und y_b. Zusammen mit der Differenzialgleichung liegt dann ein **Randwertproblem** vor.

Beim Anfangswertproblem sind Werte am Anfang des Intervalls vorgegeben, beim Randwertproblem am Rand des Intervalls.

Wir suchen zunächst die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (5.4). Hilfreich ist, dass auch hier wieder das Superpositionsprinzip gilt, vgl. Satz 5.1. Wir wenden uns also zunächst der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung zu und anschließend der inhomogenen Differenzialgleichung.

Lösung der homogenen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir suchen also die allgemeine Lösung von
$$y'' + ay' + by = 0$$
Wir setzen die Lösung an als $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und versuchen ein λ zu finden, sodass das so angesetzte y auch wirklich Lösung ist. Ob das überhaupt geht, sieht man erst im Nachhinein. Wäre die Lösung beispielsweise $y(t) = \log t$, würde man natürlich nie ein solches λ finden.

Ansatz für Lösung der homogenen Differenzialgleichung: $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$

Einsetzen von $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ in $y'' + ay' + by = 0$ ergibt unter Benutzung von $y'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ und $y''(t) = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda t}$:
$$\begin{aligned} \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} + a\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} + b\,\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \iff \quad (\lambda^2 + a\lambda + b)\,\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \iff \quad \lambda^2 + a\lambda + b &= 0 \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom p zu $y'' + ay' + by = 0$ lautet
$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

da stets $e^{\lambda t} \neq 0$ gilt. Wir atmen nun auf; es gilt also nur eine quadratische Gleichung für λ zu lösen. Dies ist gleichbedeutend damit, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p mit $p(x) = x^2 + ax + b$ zu finden. Natürlich kann es passieren, dass dieses Polynom in $\mathbb{R}$ gar keine Nullstellen besitzt. In $\mathbb{C}$ dagegen gibt es immer Nullstellen, meist sogar zwei.

1. Wir haken erstmal den einfachen Fall ab, dass das charakteristische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ besitzt. Dann sind die Funktionen y_1 und y_2 mit $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ bzw. $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ jeweils Lösungen der homogenen Differenzialgleichung. Wegen des Superpositionsprinzips lautet in diesem Fall die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung:
$$y_h(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t}$$
mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1. Fall:
Hat p zwei Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so lautet die allgemeine Lösung von $y'' + a\,y' + b\,y = 0$:
$$y_h(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t}.$$

2. Hat das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle (die dann zwangsläufig reell sein muss, denn die Koeffizienten a und b im Polynom sind ja reell), so kommen wir auch relativ leicht ans Ziel:
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ diese doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Natürlich ist dann wie vorher y_1 mit $y_1(t) = e^{\lambda t}$ wieder eine Lösung der Differenzialgleichung. Eine zweite, von y_1 verschiedene, ist y_2 mit $y_2(t) = t\, e^{\lambda t}$. Wegen des Superpositionsprinzips lautet in diesem Fall die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung:
$$y_h(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) = c_1\, e^{\lambda t} + c_2\, t\, e^{\lambda t}$$
mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Festigung: Bitte nachrechnen, dass dieses y_2 wirklich Lösung ist.

2. Fall:
Hat p eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, so lautet die allgemeine Lösung von $y'' + a\,y' + b\,y = 0$:
$$y_h(t) = c_1\, e^{\lambda t} + c_2\, t\, e^{\lambda t}.$$

3. Näher zu untersuchen bleibt der Fall, dass das charakteristische Polynom zwei verschiedene nicht-reelle Nullstellen besitzt. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ diese beiden Nullstellen. Dann gilt (siehe Band 1, Satz 4.2) $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Sei $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist also $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{j}\beta$. In diesem Fall sind $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ und $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ Lösungen der Differenzialgleichung. Mit dem Superpositionsprinzip lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung dann:
$$y_h(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) = e^{\alpha t}\, (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$
mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Fall:
Hat p zwei nicht-reelle Nullstellen $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$, $\beta = \operatorname{Im} \lambda$, so lautet die allgemeine Lösung von $y'' + a\,y' + b\,y = 0$:
$$y_h(t) = e^{\alpha t}\, (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

Festigung: Bitte nachrechnen, dass diese y_1, y_2 wirklich Lösungen sind.