



Leseprobe

André Krischke, Helge Röpcke

Graphen und Netzwerktheorie

Grundlagen - Methoden - Anwendungen

ISBN (Buch): 978-3-446-43229-1

ISBN (E-Book): 978-3-446-44184-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43229-1>

sowie im Buchhandel.

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen der Graphentheorie 13

1 Grundbegriffe der Graphentheorie 15

1.1	Grundbegriffe für Graphen	16
1.1.1	Definition eines Graphen	16
1.1.2	Grad eines Knotens	18
1.1.3	Wege und Kreise	21
1.2	Typen von Graphen	23
1.2.1	Vollständige Graphen	23
1.2.2	Bipartite Graphen	26
1.2.3	Gerichtete Graphen und Multigraphen	28
1.2.4	Bewertete Graphen	29
1.2.5	Bäume und Wälder	33
1.2.6	Gozinto-Graphen	36

2 Das Kürzeste-Wege-Problem in unbewerteten Graphen 39

2.1	Aufspannende Bäume	39
2.2	Breitensuche	41
2.3	Tiefensuche	44
2.4	Anwendungen in der Praxis	47

3 Das Kürzeste-Wege-Problem in bewerteten Graphen 52

3.1	Der Kürzeste-Wege-Baum und die kombinatorische Explosion	52
3.2	Der Algorithmus von Dijkstra	56

II Ausgewählte Probleme der Graphentheorie 64

4 Das Problem minimal aufspannender Bäume 66

4.1	Minimal aufspannender Baum	66
4.2	Algorithmus von Kruskal	68
4.3	Algorithmus von Prim	71

5	Matching-Probleme	74
5.1	Definition von Matchings	74
5.2	Matchings für bipartite Graphen	76
5.3	Maximal-Matching-Algorithmen	78
5.3.1	Greedy-Matching-Algorithmus	79
5.3.2	Verbessernde Wege	80
6	Das Problem des chinesischen Postboten	83
6.1	Euler-Kreise und Euler-Wege	83
6.2	Postbotenproblem	90
7	Das Problem des Handlungsreisenden	95
7.1	Hamilton-Kreise und Hamilton-Wege	95
7.1.1	Existenz von hamiltonschen Graphen	97
7.1.2	Problem des Handlungsreisenden	98
7.2	Heuristiken	100
7.3	Anwendungen in der Praxis	104
8	Färbungsprobleme	110
8.1	Planarität und Satz von Euler	110
8.2	Knotenfärbung	115
8.3	Kantenfärbung	120
8.4	Dualität zwischen Knoten- und Kantenfärbung	122
III	Netzwerktheorien und -modelle	124
9	Netzwerktheorie – Bedeutung und neuere Erkenntnisse	126
9.1	Große Netzwerke in der Praxis	126
9.1.1	Interorganisations-Netzwerke	127
9.1.2	Beziehungs-, Freundschafts- und soziale Netzwerke	128
9.1.3	Informations-, Daten- und Wissensnetzwerke	129
9.1.4	Technologische Netzwerke	132
9.1.5	Biologische Netzwerke	134
9.2	Ausgewählte Erkenntnisse der Netzwerkforschung	135
9.2.1	Forschung im Bereich sozialer Netzwerke	136
9.2.2	Cluster als Kennzeichen sozialer Netzwerke	137
9.2.3	Kurze Wege als Kennzeichen sozialer Netzwerke	139
9.2.4	Skalen-Invarianz als Kennzeichen großer Netzwerke	140

9.2.5	Universalität als Kennzeichen großer Netzwerke	143
9.3	Weiterführende Literatur	145
10	Eigenschaften von Netzwerken	146
10.1	Charakterisierung von Netzwerken auf Knoten-Ebene	146
10.1.1	Unterscheidung von Hubs und Authorities	146
10.1.2	Lokaler Cluster-Koeffizient	147
10.1.3	Zentralitätsmaße eines Knotens	148
10.2	Charakterisierung von Netzwerken auf Teilgraphen-Ebene	150
10.2.1	Verfahren zum Auffinden zusammenhängender Komponenten	152
10.2.2	Algorithmen zum Auffinden von Communities	153
10.2.3	Klassifizierende Verfahren zum Auffinden von Communities	154
10.3	Charakterisierung von Netzwerken mit statistischen Größen	156
10.3.1	Mittlerer Knotengrad und durchschnittliche Netzwerkdicke	157
10.3.2	Häufigkeitsverteilung der Kontengrade	158
10.3.3	Der Durchmesser und die mittlere Pfadlänge des Netzwerks	160
10.3.4	Der globale Cluster-Koeffizient (C) eines Netzwerks	161
10.4	Weiterführende Literatur	161
11	Entstehung von Netzwerken – Netzwerkmodelle	162
11.1	Erzeugung von Netzwerken mit Gleich- oder Binomialverteilung	163
11.1.1	Erzeugung von Gittergraphen mit deterministischen Regeln	163
11.1.2	Erzeugung eines Erdős-Renyi-Zufallsgraphen	165
11.1.3	Erzeugung des Watts-Strogatz-Modells – zwischen Kreis- und Zufallsgraph	170
11.2	Erzeugung von Netzwerken mit skalenfreier Verteilung	174
11.2.1	Erzeugung eines skalenfreien Netzwerks durch das Wachstumsmodell ..	174
11.2.2	Erzeugung eines skalenfreien Netzwerks mit dem Barabasi-Albert-Modell des „Preferential Attachment“	175
11.2.3	Erweiterungen des Barabasi-Albert-Modells	178
11.3	Weiterführende Literatur	181
12	Dynamische Prozesse auf großen Netzwerken	182
12.1	Robustheit von Netzwerken	182
12.1.1	Relevanz und Erscheinungsformen	182
12.1.2	Wesentliche Modelle und Lösungsverfahren	185
12.1.3	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	187

12.2	Epidemische Ausbreitung in Netzwerken	187
12.2.1	Relevanz und Erscheinungsformen	188
12.2.2	Wesentliche Modelle und Lösungsverfahren	190
12.2.3	Homogene Modelle zur Beschreibung der Ausbreitung.....	191
12.2.4	Netzwerkmodelle zur Beschreibung der Ausbreitung	193
12.2.5	Impfung in heterogenen Netzwerken	194
12.2.6	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	197
12.3	Suche in Netzwerken	197
12.3.1	Relevanz und Erscheinungsformen	198
12.3.2	Wesentliche Modelle und Lösungsverfahren	198
12.3.3	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	201
12.4	Transportprozesse in Netzwerken	201
12.4.1	Datenverkehr und Datenstau in Netzwerken	202
12.4.2	Kaskaden in Transportnetzwerken	205
12.4.3	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	209
12.5	Kollektives Verhalten in Netzwerken	209
12.5.1	Meinungsbildung in Netzwerken – Das Voting-Modell.....	210
12.5.2	Informationskaskaden in Netzwerken	211
12.5.3	Spieltheorie in Netzwerken	213
12.5.4	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	215
12.6	Dynamische Prozesse in Netzwerken – Forschungsbedarf	215
12.7	Weiterführende Literatur	216

13 Softwarebasierte Analyse und Modellierung großer Netzwerke 217

13.1	Die Modellbildung als Forschungsprozess	217
13.1.1	Formulierung der Forschungsfrage	218
13.1.2	Formulierung der Forschungshypothesen	218
13.1.3	Festlegung der Modellstruktur	219
13.1.4	Implementierung und Verifikation des Modells	220
13.1.5	Analyse und Validierung des Modells	221
13.1.6	Ergebnisdarstellung zur Entscheidungsunterstützung.....	221
13.2	Softwarebasierte Analyse und Visualisierung	222
13.2.1	Vorgehen bei der Datenbeschaffung und Datenimport	223
13.2.2	Softwarebasierte Erzeugung von Netzwerken	225
13.2.3	Grundlagen der Visualisierung und des Graphzeichnens.....	226
13.2.4	Softwarebasierte Analyse großer Netzwerke	228

13.3 Softwarebasierte Simulation dynamischer Prozesse in Netzwerken	231
13.3.1 Vergleich verschiedener Simulationsmodelle	231
13.3.2 Agentenbasierte Simulationsmodelle auf regulären Netzwerken.....	233
13.3.3 Simulation des Wachstums von Netzwerken	235
13.3.4 Simulation dynamischer Prozesse in Netzwerken	236
13.3.5 Simulation dynamischer Prozesse auf dynamischen Netzwerken.....	238
13.3.6 Generierung von Simulationsdaten und Durchsuchen des Lösungs- raums	239
13.4 Schlussbetrachtung zur softwarebasierten Modellierung	240
13.5 Weiterführende Literatur	241
Literaturverzeichnis	242
Bildnachweise	247
Sachwortverzeichnis	248

Vorwort

Das vorliegende Buch beschäftigt sich, so sagt der Name, mit Graphen und mit Netzwerken. Streng genommen handelt es sich dabei um ein und dasselbe; wir verwenden in diesem Buch den Begriff *Netzwerk* in der Regel zur Kennzeichnung realer Strukturen aus der Praxis, während wir den Begriff *Graph* meist im eher theoretischen Kontext benutzen. Durch den Gebrauch dieser beiden Begriffe werden auch die beiden Sichtweisen auf eine Thematik deutlich, die in unzähligen für unsere Zeit wichtigen Herausforderungen eine Rolle spielen: die Darstellung und Beschreibung, qualitativer wie quantitativer Art, von immer komplexeren Strukturen, mit denen Beziehungen von abstrakten Objekten, aber auch von Menschen, Unternehmen, Staaten modelliert werden können.

Die beiden erwähnten Sichtweisen, nämlich auf der einen Seite die mathematisch wichtigen Aspekte der Graphentheorie und auf der anderen Seite das Modellieren praktischer Problemstellungen vor wirtschaftswissenschaftlichem Hintergrund, greifen natürlich ineinander. Mit diesem Buch wird ein ernstzunehmender Versuch unternommen, die Schnittstellen und Verbindungen zwischen beiden Seiten verständlich darzustellen – wie immer wandert man dabei aber auch auf dem bekannten schmalen Grat zwischen „zu theoretisch für BWL“ und „zu praktisch für Mathematik“.

Das Buch hat, den beiden Sichtweisen entsprechend, zwei Ziele: Es soll die Grundlagen der Graphentheorie näherbringen, und es soll anhand ausgewählter Praxisthemen einen Eindruck davon vermitteln, wie wirtschaftlich relevante Probleme mit dieser Art von Mathematik angegangen werden können. Das Buch ist in drei Teile gegliedert:

1. **Grundlagen der Graphentheorie:** Die Graphentheorie, so werden Sie als Leserin oder als Leser schnell feststellen, hat als separates Gebiet der Mathematik ihre eigene Sprache, in die wir im ersten Teil einen Einblick geben wollen. Das mag zunächst ungewohnt klingen, bietet jedoch eine Chance: Alles in der Graphentheorie lässt sich im Prinzip in einer überaus anschaulichen Art und Weise und für jedermann und jedefrau formulieren – ohne dass ein Haufen mathematischer Vorkenntnisse erforderlich wäre und aktiviert werden müsste. Es ist tatsächlich so: Haben wir erst einmal die wichtigsten Vokabeln dieser Sprache erlernt, können wir uns an die Behandlung der Anwendungsprobleme im zweiten Teil machen.
2. **Ausgewählte Probleme der Graphentheorie:** Ein Graph besteht aus Knoten und aus Kanten, die diese Knoten verbinden können. Viel mehr muss man zunächst nicht wissen. Jede mathematische Teildisziplin lässt sich durch einige typische, zentrale Fragestellungen charakterisieren, und bei der Graphentheorie klingen diese in ihrer praktischen Formulierung beispielsweise so: „Wie komme ich in einem Graphen am schnellsten von einem Knoten zum anderen?“, „Wie kann ich die Knoten eines Graphen optimal einfärben?“, „Wie finde ich eine günstige Darstellung eines Graphen?“
3. **Netzwerktheorien und -modelle:** Noch praxisbezogener ist der dritte Teil, in dem wir uns ausführlich mit den verschiedensten Arten von großen Netzwerken der Praxis beschäftigen – so etwa mit Unternehmens- und Wissensnetzwerken oder auch sozialen und biologischen

Netzwerken. Wir benutzen dabei die Sprache der Graphentheorie und kommen immer wieder auf die zentralen Anwendungsprobleme und Fragen aus dem zweiten Teil zurück.

Ein überaus spannender Aspekt bei Graphen und Netzwerken besteht darin, dass die erwähnten zentralen Fragen sich meist sehr einfach formulieren lassen, sich aber hinsichtlich der Komplexität ihrer Beantwortbarkeit durchaus unterscheiden können: Manche sind eindeutig und schnell lösbar, manche sind „schwer lösbar“ – ein Begriff, den wir noch präzisieren müssen – manche sind auch mehrdeutig oder nachweisbar nicht lösbar. Für große Netzwerke in der Praxis muss man häufig auf numerische Simulationen zurückgreifen.

Was die Sprache betrifft, wie sie heute in der sogenannten diskreten Mathematik verwendet wird, kann man sagen, dass etwa zur Mitte des letzten Jahrhunderts eine Wiederentdeckung der Graphentheorie stattfand. Die vorgestellten Optimierungskonzepte, so etwa kürzeste Wege in Netzwerken, überschneidungsfreie Darstellungen oder Färbungsprobleme, sind von großem Interesse und die Algorithmen stetiger Aktualisierung und Verbesserung unterworfen. Seit dem Aufkommen des Internets sind empirische Daten für große Netzwerke der Praxis verfügbar, die Ende der 1990er Jahre eine neue Welle der Netzwerktheorien angestoßen haben. Wir bleiben im gesamten Buch bei „praktischer Graphentheorie“, selbst wenn die Graphentheorie auch und vor allem überreich an theoretischen, noch ungelösten Fragestellungen ist. Was also ein Graph oder ein Netzwerk ist und wo diese Strukturen benötigt werden und hilfreich sein können, das soll mithilfe des vorliegenden Buches anhand der angedeuteten Fragestellungen geklärt werden. Dabei lassen sich bereits zahlreiche Anwendungsbereiche identifizieren:

- Kürzeste-Wege-Probleme
- Rundreiseprobleme
- Straßenplanung, Ampelschaltungen
- Computernetzwerke, Schaltpläne
- Stundenpläne, Prüfungspläne
- Gozinto-Graphen, Produktionsplanung
- Breiten- und Tiefensuche
- Jobvermittlung, Partnersuche
- Müllabfuhr, Postbotentour
- ...
- Erzeugung von Netzwerken
- Robustheit von Netzwerken
- Ausbreitung in Netzwerken
- Suche in Netzwerken
- Soziale Netzwerke
- Transportprozesse
- Individuelles und kollektives Verhalten
- Verbreitung von Gerüchten
- Spieltheorie in Netzwerken
- ...

Das Selbststudium dieses Buches sollte in jedem Fall mit Kapitel 1 beginnen, da dort die fundamentalen Grundlagen für die Beschäftigung mit graphentheoretischen Problemen gelegt werden und eine Einführung in die Sprache der Graphen umfasst. Die weiteren Kapitel sind größtenteils voneinander unabhängig. Sie basieren auf entsprechenden Vorlesungen und Seminaren, die die Autoren an der Hochschule für angewandte Wissenschaften München halten.

Den Studierenden der Fakultät für Betriebswirtschaft der Hochschule München gilt unser besonderer Dank, da wir durch spannende Diskussionen in unseren Veranstaltungen interessante Ideen und wertvolle Anmerkungen für dieses Buch mitnehmen konnten. Herrn Bernhard Storf danken wir für die Durchsicht des Manuskripts und dem Hanser Verlag für die immer gute und flexible Zusammenarbeit.

München, im August 2014

André Krischke
Helge Röpcke

weit voneinander entfernt oder wie sonst beschaffen die Brücken waren. Nur ihre gegenseitige Lage und welche Landteile sie miteinander verbanden schien eine Rolle zu spielen. Euler versuchte, an die Frage systematisch heranzugehen, und es gelang ihm auch, sie zu beantworten. (Gelingt es Ihnen auch?) Aber er hatte bei seinen Überlegungen mehr entdeckt: nämlich die wahren Strukturen hinter diesem Problem. Dass er diese erfassen und benennen konnte; dass er tiefer in die Thematik einstieg; dass er zum Schöpfer einer neuen Sprache wurde – dies war, darin stimmen die meisten Mathematiker überein, die Geburtsstunde der Graphentheorie.

■ 1.1 Grundbegriffe für Graphen

In diesem Abschnitt führen wir die grundlegenden Begriffe und Notationen ein. Was ist eigentlich genau ein Graph, und was macht ihn aus? Erst mithilfe des nun folgenden Grundwerkzeugs können wir uns an die Formulierung und Lösung von Problemen aus der Anwendung machen.

1.1.1 Definition eines Graphen

Ein Graph ist schnell gezeichnet – tatsächlich gehört nichts weiter dazu als das Markieren einiger Punkte, die in diesem Zusammenhang meist *Knoten* (oder auch *Ecken*) genannt werden und von denen wiederum einige durch Linien, sogenannte *Kanten*, verbunden werden. Weder die Form oder Länge der Kanten noch die Anordnung der Knoten (etwa durch Angabe irgendwelcher Koordinaten) spielt dabei eine Rolle. Allein die Tatsache, welche seiner Knoten miteinander verbunden sind und welche nicht, charakterisiert einen Graphen und legt ihn fest.

Allein hier wird schon klar, dass man ein und denselben Graphen durch eine Unmenge verschiedener Zeichnungen realisieren kann. Jede solche Zeichnung, aus der die Verbindungen der Knoten und Kanten hervorgehen, nennen wir eine *Darstellung des Graphen*. Zwei verschiedene Darstellungen des gleichen Graphen werden wir der Einfachheit halber miteinander identifizieren; wir sagen dann auch einfach, die beiden Graphen sind *gleich*, so etwa die drei Graphen in *Bild 1.2*. Die intuitiv klare Definition eines Graphen können wir auch formaler angeben:

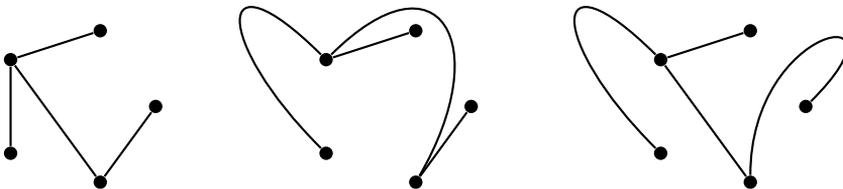


Bild 1.2 Drei verschiedene Darstellungen eines Graphen: Beschaffenheit der Kanten, Skalierung etc. machen keinen Unterschied.

Graph

Ein *Graph* G ist ein Paar von Mengen

$$G = (V, E). \quad (1.1)$$

Dabei ist V eine Menge mit beliebig vielen Elementen, den sogenannten *Knoten* von G . Mit E wird die Menge aller *Kanten* bezeichnet. Eine Kante verbindet zwei (im Allgemeinen unterschiedliche) Knoten miteinander.

Die hier gewählten Bezeichnungen sind in der Literatur so üblich; sie sind Abkürzungen der entsprechenden englischen Wörter: *vertex* für Knoten und *edge* für Kante. Man beachte, dass diese Definition eines Graphen auch den Fall eines oder mehrerer alleinstehender Knoten umfasst, wohingegen Kanten ohne Knoten nicht möglich sind: Es gibt kein alleinstehendes Kantenende und keine alleinstehende Kante.

Adjazenz und Inzidenz

Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, oder zwei Kanten, die einen gemeinsamen Knoten besitzen, nennt man *benachbart* oder *adjazent*. Gehört ein Knoten zu einer Kante, so nennen wir die beiden *inzident*.

Bei der Modellierung des Königsberger Brückenproblems stellt man fest, dass es in Königsberg Landstücke (Knoten) gibt, die durch verschiedene Brücken (Kanten) miteinander verbunden sind. Das entspricht einem Graphen, bei dem es mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten gibt. Dabei ist zu beachten, dass unsere Definition diesen Fall nicht ausschließt; häufig benutzt man aber zur Unterscheidung und näheren Bestimmung die Begriffe *Multigraph* für Graphen mit solchen Mehrfachkanten (vgl. Abschnitt 1.2.3) und *einfacher* oder *schlichter Graph* für den anderen Fall: Bei einem *einfachen* Graphen sind zwei unterschiedliche Knoten entweder durch *eine* Kante miteinander verbunden oder nicht.

Oft werden die Knoten eines Graphen auch benannt, manchmal in der Form v_1, v_2, \dots, v_n , oder man nummeriert einfach schlicht mit Zahlen durch. In unseren Bildern ersetzen wir dann die Punkte durch kleine Kästchen oder Kreise, in denen der Name des Knotens steht (vgl. Bild 1.3). Die Kanten werden im Textfluss mit geschweiften Klammern bezeichnet, beispielsweise $\{1, 2\}$

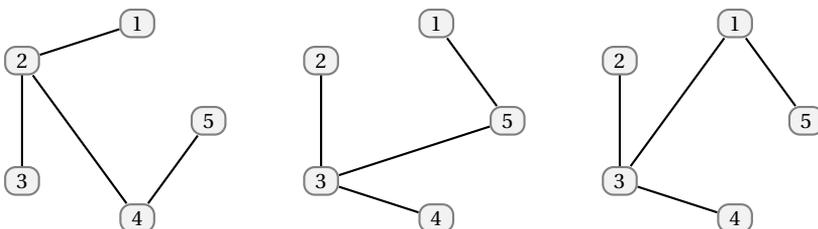


Bild 1.3 Drei Graphen mit Knotenbenennung; alle sind isomorph zueinander. Ohne Bezeichnung der Knoten wären die Graphen gleich, wenn auch nicht gleich dargestellt.

für die Kante, die die beiden Knoten 1 und 2 verbindet. Der linke Graph in *Bild 1.3* kann demnach beschrieben werden durch

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{und} \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

Die Benennung von Knoten hat übrigens zur Folge, dass wir einen weiteren Begriff, den der *Isomorphie*, einführen müssen: Unterscheiden sich zwei Graphen G und G' höchstens in der Benennung ihrer Knoten, nicht aber in ihrer grundsätzlichen Struktur, so nennt man sie *isomorph* (also „im Wesentlichen gleich“):

Isomorphie von Graphen

Haben zwei Graphen G und G' die gleiche Anzahl von Knoten und gibt es darüber hinaus eine eindeutige Zuordnung der Knoten von G und G' , gemäß der die Kanten von G den Kanten von G' entsprechen, so nennt man die beiden Graphen *isomorph* und schreibt in diesem Fall $G \sim G'$.

Bild 1.3 macht dies deutlich: Die grundsätzliche Struktur aller drei dort abgebildeten Graphen ist identisch, aber die Graphen sind nicht gleich. Durch Umnummerierung der Knoten können sie aber ineinander übergeführt werden; so etwa der mittlere und der rechte durch Vertauschung der Knoten 1 und 5. Man beachte Folgendes: Würden wir die Bezeichnung der Knoten in *Bild 1.3* weglassen, dann wären die Graphen alle gleich, so wie in *Bild 1.2*, wenn auch nicht gleich dargestellt.

1.1.2 Grad eines Knotens

Sehr häufig ist es von Bedeutung, wie viele verschiedene Kanten von einem Knoten ausgehen. Damit kommen wir zu dem wichtigen Begriff des *Knotengrads* und einigen damit verbundenen Folgerungen.

Grad eines Knotens

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für jeden Knoten $v \in V$ definieren wir den *Grad von v* als die Anzahl der von v ausgehenden Kanten und schreiben dafür $d(v)$:

$$d(v) = |\{\{v, w\} \mid \{v, w\} \in E\}|. \quad (1.2)$$

Ein Graph, bei dem alle Knoten den konstanten Grad k haben, heißt *k -regulär*. Einen Knoten vom Grad 0 nennen wir *isoliert*.

Hin und wieder spielen auch der kleinste oder der größte Grad eines Knotens bzw. der durchschnittliche Knotengrad in einem Graphen eine Rolle:

Hierfür finden sich auch die Bezeichnungen $\delta(G)$ bzw. $\Delta(G)$ für den minimalen bzw. maximalen Grad eines Knotens von G oder $d(G)$ für den *Durchschnittsgrad von G* .

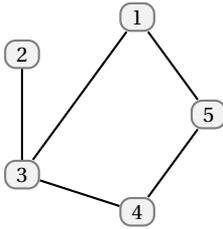


Bild 1.4 Ein Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) = 1$ (bei Knoten 2), Maximalgrad $\Delta(G) = 3$ (bei Knoten 3) und Durchschnittsgrad $d(G) = \frac{1+2+2+2+3}{5} = 2$

Minimalgrad, Maximalgrad, Durchschnittsgrad eines Graphen

In einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir mit

- $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ den *Minimalgrad* von G ,
- $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ den *Maximalgrad* von G ,
- $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ den *Durchschnittsgrad* von G .

In *Bild 1.4* sind diese Begriffe an einem konkreten Graphen verdeutlicht. In jedem Graphen gilt selbstverständlich

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Offenbar gilt die wichtige Beziehung

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| \tag{1.3}$$

bzw. über den Durchschnittsgrad ausgedrückt:

$$|V| \cdot d(G) = 2 \cdot |E|.$$

Die Summe aller Knotengrade in einem beliebigen Graphen entspricht also zweimal der Anzahl der Kanten – eine Tatsache, die man sich sehr schnell klarmachen kann, da jede Kante zwei Knoten miteinander verbindet und sich somit bei jedem dieser beiden Knoten der Knotengrad um 1 erhöht. Ein schöner Satz der aus der Gleichung (1.3) folgt, lautet:

Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Auch wenn in diesem Buch die Anwendungsaspekte im Vordergrund stehen sollen und es daher nicht um mathematische Beweise gehen soll, wollen wir uns dennoch an der einen oder anderen Stelle einige der Aussagen klarmachen, so auch hier (zumal man bei so viel „gerade“, „ungerade“ und „Knotengrad“ schon einmal leicht den Überblick verlieren kann). Ausgehend von Gleichung (1.3) teilen wir die Menge unserer Knoten V in zwei Teilmengen auf, nämlich

in die Teilmenge V_1 , die alle Knoten mit geradem Grad enthält, und in die Teilmenge V_2 , in welcher sich die Knoten mit ungeradem Grad befinden. Wir erhalten dann

$$2 \cdot |E| = \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{gerade}} = \underbrace{\sum_{v \in V_1} d(v)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{v \in V_2} d(v)}_{\text{ungerade}} .$$

Damit die rechte Seite der Gleichung ebenfalls eine gerade Zahl ergibt, muss auch der zweite Summand eine gerade Zahl ergeben (der erste Summand, eine beliebige Summe von geraden Zahlen ist immer gerade). Der zweite Summand (die Summe von ungeraden Zahlen) ist genau dann gerade, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Anders ausgedrückt, von den Knoten mit ungeradem Grad muss es immer eine gerade Anzahl geben, und genau das wollten wir uns klarmachen.

Schon diese kleine, aber wichtige Aussage können wir an einem Praxisbeispiel verdeutlichen:

Beispiel 1.1

Eine Menge von sieben Unternehmen arbeitet in verschiedenen Kooperationen zusammen. Dabei unterhält jedes Unternehmen mit genau drei anderen Unternehmen enge Geschäftsbeziehungen. Ist dies möglich?

Modelliert man dieses Problem, wobei die Unternehmen durch Knoten und die bestehenden Geschäftsbeziehungen durch entsprechend verbindende Kanten beschrieben werden, so erhält man einen Graphen mit sieben Knoten, von denen jeder den Grad $d(v) = 3$ hat. In der Summe ergibt sich damit aber 21, eine ungerade Zahl: Ein solches Szenario kann es daher nicht geben, weil es einen entsprechenden Graphen nicht geben kann. ■

Betrachten wir eine kleine Modifikation von *Beispiel 1.1*, nämlich acht statt sieben Unternehmen. Was stellt man fest? Die Gradsumme ergibt nun 24, was zwar noch nicht automatisch bedeutet, dass es einen solchen Graphen gibt – aber es gibt ihn: In *Bild 1.5* ist eine schöne Darstellung und damit mögliche Lösung für acht Unternehmen (Knoten) mit jeweils exakt drei Geschäftsbeziehungen (Kanten) zu sehen. Der entstehende Graph ist 3-regulär.

Ähnlich kann man bei den unterschiedlichsten Fragestellungen argumentieren, sofern es um Verbindungen gewisser Objekte geht. Beispielweise kann es auch keine Gruppe von, sagen wir, neun Personen geben, in der jede Person exakt fünf der anderen Personen kennt (wobei wir

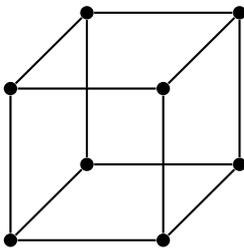
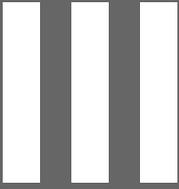


Bild 1.5 Ein 3-regulärer Graph mit 8 Knoten



Netzwerktheorien und -modelle

Im ersten Teil dieses Buches wurden Idealtypen von Graphen wie Wege, Kreise, vollständige, bipartite, gerichtete, bewertete Graphen sowie Bäume und Wälder dargestellt. Diese Idealtypen bildeten die Modelle, auf denen die Lösung der in Teil II des Buches dargestellten Probleme basieren. So wurde der bipartite Graph als Basis für den Greedy-Matching-Algorithmus verwendet, um im Rahmen des Maximalen-Matching-Problems beispielsweise Arbeitssuchende mit einer adäquaten Stelle zu versorgen.

Dabei wurde stets angenommen, dass die Struktur des Graphen aus der jeweiligen Aufgabenstellung abgeleitet werden kann und somit gegeben ist. Es blieb jedoch die Frage unbeantwortet, durch welche Wachstumsmechanismen solche Graphen bzw. Netzwerke in der Praxis überhaupt entstehen. Für ein technisches Netzwerk wie beispielsweise ein Distributionsnetzwerk eines Spediteurs oder das Straßen- oder Stromnetz einer Stadt mag der Entstehungsprozess noch nachvollziehbar sein, da diese Netzwerke meist Ergebnis eines expliziten und teilweise zentralen Planungsprozesses sind.

Gänzlich anders sieht es beispielsweise bei sozialen Netzwerken aus, die sich in der Regel aus der Anwendung lokaler und individueller Entscheidungen ergeben. So ist beispielsweise das Freunde-Netzwerk auf Facebook sicherlich nicht das Ergebnis einer zentralen oder koordinierten Planung, sondern vielmehr das Ergebnis einer sehr großen Anzahl an individuellen Einzelentscheidungen („like or not like“), bei denen die Anzahl der existierenden Verbindungen (Grad) des einzelnen Users (Knoten) und die zeitliche Reihenfolge der Bildung von Verknüpfungen (Kanten) eine wesentliche Rolle spielen.

Inbesondere stellt sich die Frage wie sich Netzwerke der Praxis trotz ihrer teils enormen Größe mithilfe möglichst leicht bestimmbarer Parameter charakterisieren lassen. Die oft wichtigste Frage ist aber, ob diese Modelle es erlauben, auch dynamische Prozesse, wie beispielsweise die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit oder eines Computervirus in einem Netzwerk abzubilden, um daraus Vorhersagen über das zukünftige Verhalten oder Hinweise für eine geeignete Netzwerkgestaltung zu erhalten. Häufig werden die Begriffe Graph und Netzwerk synonym verwendet, in diesem dritten Teil des Buches soll zur Kennzeichnung realer Strukturen aus der Praxis stets der Begriff des *Netzwerks* verwendet werden, deren Untersuchungen im Gegensatz zur Graphentheorie im Wesentlichen auf empirischen Daten beruhen.

Im Abschnitt 9.1 werden charakteristische Typen von Netzwerken in der Praxis und besonders relevante Erkenntnisse der neueren Netzwerkforschung erläutert. Im Kapitel 10 betrachten wir die wichtigsten charakteristischen Parameter auf den verschiedenen Ebenen des Netzwerks. Im Kapitel 11 werden verschiedene Algorithmen zur Erzeugung von Netzwerken miteinander verglichen und im Kapitel 12 die relevanten dynamischen Prozesse in Netzwerken dargestellt. Abschließend wird in Kapitel 13 der Modellierungs- und Forschungsprozess im Rahmen der Netzwerkforschung skizziert und anhand ausgewählter Simulationsmethoden und Softwareanwendungen veranschaulicht.

Insgesamt soll dieser dritte Teil den Leser motivieren und befähigen, aus empirischen Erkenntnissen über Netzwerke der Praxis gezielt Forschungsfragen bezüglich der Struktur oder Dynamik der betrachteten Netzwerke abzuleiten, die er mithilfe von möglichst realitätsnahen Netzwerkmodellen analysieren und simulieren kann, um die aufgestellten Hypothesen zu prüfen.

9

Netzwerktheorie – Bedeutung und neuere Erkenntnisse

In diesem Kapitel werden zunächst zur Eingrenzung des Untersuchungsgegenstandes die charakteristischen Typen von Netzwerken in der Praxis beschrieben und mit Beispielen veranschaulicht. Die wesentlichen jüngeren Forschungsergebnisse, die teilweise gerade einmal zehn Jahre alt sind, sollen schlaglichtartig dargestellt werden, um die Relevanz des Untersuchungsgegenstandes zu belegen.

■ 9.1 Große Netzwerke in der Praxis

In den vergangenen 15 bis 20 Jahren waren es vor allem Netzwerke, die unsere Gesellschaft dramatisch beeinflusst haben. Der Begriff „Netzwerk-Gesellschaft“ wurde bereits 1996 vom spanischen Soziologen Manuel Castells geprägt. Dabei waren es nicht so sehr technische Netzwerke wie beispielsweise das Internet, welche diese neue Ära eröffnet haben, sondern vielmehr das Aufkommen von sogenannten Inter-Organisations-Netzwerken zwischen weltweit agierenden Unternehmens- und Wertschöpfungsnetzwerken, Beziehungs- bzw. Freundschaftsnetzwerke wie Facebook und die immensen Datennetzwerke des World Wide Web.

Dabei gibt es Netzwerke in den verschiedenen Bereichen schon seit geraumer Zeit: Die Familien der Medici und Fugger bildeten schon im 15. und 16. Jahrhundert weltumspannende Unternehmensnetzwerke, und die Bibliothek von Alexandria im 3. Jahrhundert v. Chr. stellte ein für die damalige Zeit einmaliges Datennetzwerk dar. Schon der erste römische Kaiser Augustus legte ein weit verzweigtes Straßennetz im Imperium Romanum an („Alle Wege führen nach Rom“); und waren die Beziehungs- und Freundschaftsnetzwerke weitgehend auf Familien, Freunde und Geschäftspartner beschränkt, so nutzte die gesellschaftliche Gruppe des Adels in allen Ländern das Arrangement von Hochzeiten als strategisches Mittel zur Steuerung ihres Machteinflusses.

Der entscheidende qualitative Unterschied der Rolle von Netzwerken in den vergangenen 20 Jahren und der zukünftigen Entwicklung liegt in der Tatsache begründet, dass diese immer größere Bereiche der gesellschaftlichen Wirklichkeit umfassen und in immer stärkerem Maße miteinander vernetzt sind. Daher erscheint es nicht übertrieben zu behaupten, dass die Netzwerk-Gesellschaft gerade erst am Anfang ihrer Entwicklung steht und daher die Modelle zu ihrem Verständnis eine hohe Aufmerksamkeit verdienen.

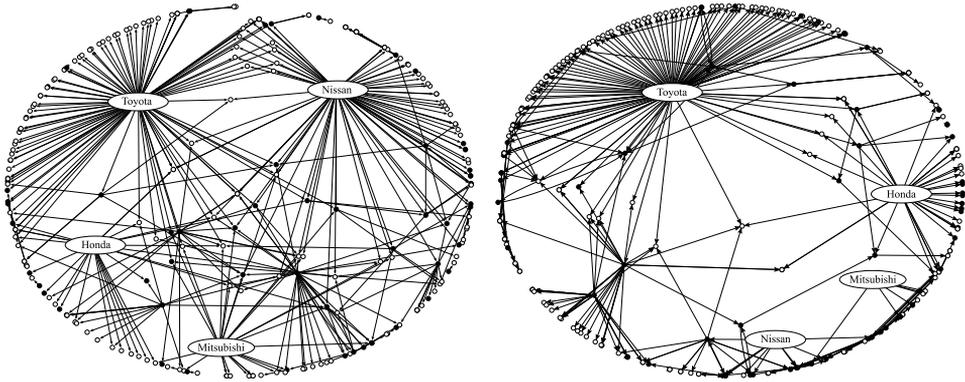


Bild 9.1 Das Netzwerk der Shareholder in der japanischen Automobilindustrie: Vergleich der Struktur im Jahr 1985 (links) mit der Struktur im Jahr 2003 (rechts) [1]. – Nachdruck mit Genehmigung

9.1.1 Interorganisations-Netzwerke

Interorganisations-Netzwerke sind Netzwerke, die von strategisch handelnden Akteuren gebildet werden, welche ihre Handlungen untereinander koordinieren, um auf diese Weise Leistungen zu erbringen, die ohne Netzwerk kaum möglich wären. Das Netzwerk ist damit als Koordinationsmechanismus zwischen Markt (koordiniert durch Preise) und Hierarchie (koordiniert durch Organisation) einzuordnen, beispielsweise in den globalen Wertschöpfungsketten oder Innovationsnetzwerken.

Beispiel 9.1

Der Firma *Apple Inc.* gehört keine einzige der Fabriken, in denen das sehr erfolgreiche iPhone hergestellt wird, kein einziger Lagerstandort und kein einziges Fahrzeug zum Transport. Alle notwendigen Wertschöpfungsschritte werden aus dem Lieferantennetzwerk bezogen und durch vertragliche Regelung und Planungsprozesse koordiniert. Gerade wegen der hohen Unsicherheiten auf der Nachfrageseite und den kurzen Innovationszyklen würde es für Apple nicht wirtschaftlich sein, große Teile des Netzwerks über die eigene Organisation zu koordinieren. Denn dies würde bedeuten, dass beispielsweise die Fabriken zur Herstellung der Displays Apple gehören würden. Gäbe es einen Technologiewechsel, müsste Apple mit hohen Abschreibungen rechnen. Es ist aber auch nicht wirtschaftlich, große Teile des Lieferantennetzwerks rein über die Preismechanismen des Marktes zu steuern, denn dies würde bedeuten, dass Apple die Displays im Rahmen kurzfristiger Verträge zukaufen würde und bei einer insgesamt hohen Marktnachfrage entweder sehr hohe Preise zahlen müsste oder aufgrund konkurrierender anderer Abnehmer keine ausreichende Menge erwerben könnte. ■

Bild 9.1 zeigt ein Beispiel des Shareholder-Netzwerks in der japanischen Automobilindustrie in den Jahren 1985 und 2003. Zwei Dinge sind aus der Netzwerkvisualisierung ohne weitere quantitative Berechnung zu erkennen: Einige Firmen sind deutlich mehr mit anderen Firmen verbunden und besitzen damit einen deutlich höheren Knotengrad; diese Firmen bilden sogenannte „Hubs“. Zudem zeigt der zeitliche Vergleich zwischen der linken und rechten Hälfte

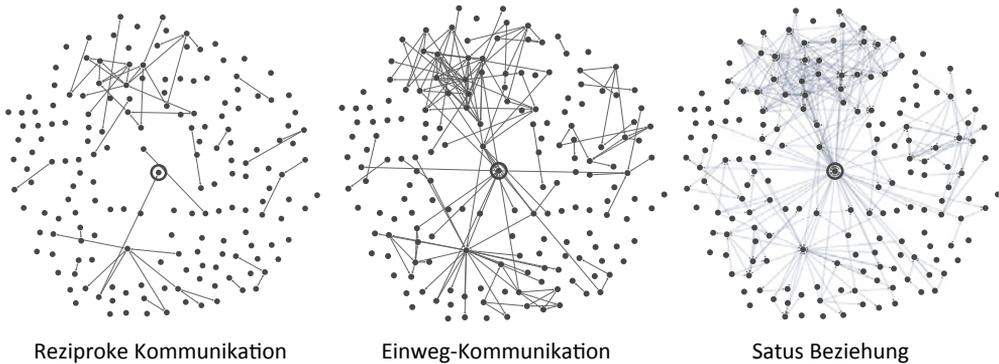


Bild 9.2 Die unterschiedliche Qualität der Beziehung in sozialen Netzwerken zeigte sich bei der Untersuchung von Facebook-Usernetzwerken durch den Experten Cameron Marlow [60] aus dem Jahr 2009. – Nachdruck mit Genehmigung

von *Bild 9.1*, dass die Firmen Mitsubishi Motors und Nissan Motors ihre Rolle als Hubs im Laufe der 18 Jahre verloren haben. Grund dafür waren veränderte Eigentumsverhältnisse vor allem im Zeitraum von 2000 bis 2003, welche die Regeln für Unternehmensbeteiligungen deutlich verändert hatten.

9.1.2 Beziehungs-, Freundschafts- und soziale Netzwerke

Grundsätzlich besteht ein soziales Netzwerk aus einer Gruppe von Individuen, die in Interaktion miteinander stehen, seien es individuelle oder geschäftliche Kontakte oder Bindungen über Familie oder Heirat. Die frühen sozialwissenschaftlichen Studien waren im Wesentlichen durch den hohen Aufwand zur Ermittlung verlässlicher und großer Datenmengen in der untersuchbaren Gruppengröße begrenzt. Relativ verlässliche Daten für größere Netzwerke boten Kollaborations-Netzwerke zwischen Wissenschaftlern, Kommunikationsdaten aus dem Telefon- und später aus dem E-Mail-Verkehr.

Zunehmend komplementieren jedoch elektronische Medien die traditionelle Face-to-Face- und fernmündliche Kommunikation. Da die Handlungen dieser meist individuellen und häufig anonymen Akteure der sogenannten sozialen Netzwerke sich im Gegensatz zu Interorganisations-Netzwerken nur schwer antizipieren lassen, ist auch die Vorhersage des Verhaltens solcher Netzwerke eine sehr anspruchsvolle Aufgabe.

Beispiel 9.2

Heute führen manche Nutzer von sozialen Netzwerken Hunderte von sogenannten „Freunden“ auf. Die Forscher Cameron Marlow und Kollegen untersuchten im Jahr 2009 [60], welche von diesen Beziehungen die Rolle einer echten Freundschaft haben und welche davon eher die Rolle schwacher Verbindungen und daher eher als flüchtige Bekannte denn als Freund einzustufen sind. Dazu visualisierten sie das soziale Netzwerk mit dem ausgewählten *Facebook*-Nutzer als Knoten im Zentrum, so wie es in *Bild 9.2* dargestellt ist, und unterschieden bei den Verbindungen zu den

„Facebook-Freunden“ drei Kategorien: *Reziproke Kommunikation*, falls beide Knoten der Kante sich gegenseitig Nachrichten im untersuchten Zeitraum zusandten, *Einweg-Kommunikation*, falls der Nutzer mehr Nachrichten an den „Freund“ sandte, als er selbst von diesem empfing, und *Status Beziehung*, falls der Nutzer lediglich Informationen über den „Freund“ abrief. Generell konnten die Forscher zeigen, dass Nutzer sozialer Netzwerke, selbst wenn diese eine sehr große Anzahl von typischerweise 500 „Facebook-Freunden“ besaßen, diese mit nur 10 bis 20 anderen Nutzern eine reziproke Kommunikation führten, und die Anzahl der Nutzer, denen Sie folgten, typischerweise weit unter 50 lag. ■

Aber auch innerhalb von Unternehmen werden Netzwerkanalysen eingesetzt, um beispielsweise die realen Kommunikationsnetzwerke unabhängig von der Aufbauorganisation abzubilden oder die Durchführung und Wirksamkeit von Veränderungsprojekten in Organisationen effektiver zu gestalten. Dabei kann beispielsweise die E-Mail-Kommunikation als Näherungswert für die Intensität der Beziehungen genutzt werden oder die Mitarbeiter gezielt befragt werden, an wen sie sich wenden, wenn sie einen Ratschlag benötigen. Damit können die informellen Netzwerke eines Unternehmens identifiziert und je nach Aufgabenstellung mit der Aufbauorganisation abgeglichen werden, um eine reibungslose und effiziente Koordination innerhalb der Unternehmensorganisation zu erreichen.

9.1.3 Informations-, Daten- und Wissensnetzwerke

Schon in den 1930er Jahren befassten sich Forscher wie Alfred Lotka (1880-1949) mit der Analyse von Zitations-Netzwerken wissenschaftlicher Fachpublikationen. Wie in *Bild 9.3* dargestellt, bilden dabei die jeweiligen Fachartikel die Knoten und die Literaturverweise die Kanten des Netzwerks, welches aufgrund der zeitlichen Komponente kreisfrei sein muss – denn ein aktueller Artikel kann nicht durch einen zuvor erschienenen Artikel zitiert werden. Wir haben es also mit einem gerichteten Graphen und einem Baum zu tun.

Lotka konnte nachweisen, dass die Häufigkeitsverteilung der Publikationen in Bezug auf einzelne Forscher einem Potenzgesetz mit negativem Exponenten folgt. Das bedeutet, die Vielzahl der wissenschaftlichen Veröffentlichungen konzentriert sich auf eine verhältnismäßig kleine Gruppe von Wissenschaftlern, ein Großteil der Wissenschaftler schreibt nur eine einzige oder wenige Publikationen.

Auch das Informationsnetzwerk des World Wide Web (*WWW*) ähnelt einem Zitations-Netzwerk. Die Idee zum *WWW* wurde am CERN (European Organization for Nuclear Research) im Jahr 1989 entwickelt, um den Wissenschaftlern zu ermöglichen, auf die enorme Menge an erzeugten Experimentaldaten zuzugreifen. Dabei stellen die Web-Seiten die Knoten und die Hyperlinks die Kanten des Netzwerks dar. Wie auf der rechten Seite von *Bild 9.3* dargestellt, enthält das *WWW* durchaus Kreise, da ältere Webseiten in der Regel mit Hyperlinks auf später erschienene Webseiten aktualisiert werden.

Zunehmenden Bekanntheitsgrad erlangten auch die sogenannten Präferenz-Netzwerke, in denen zwei unterschiedliche Knotenarten mit Kanten verbunden sind und ein bipartites Netzwerk bilden. Beispiele hierfür sind Individuen und ihre Objekte der Präferenz, wie beispielsweise Bücher oder Filme, wobei die Kanten anzeigen, dass ein Individuum ein bestimmtes Objekt, wie beispielsweise ein Buch, präferiert. Mit zunehmender Ausbreitung des Internets

Sachwortverzeichnis

- Adjazenz, 17
- Adjazenzmatrix, 25
- Algorithmus
 - Baum-, 102
 - Best-Successor-, 101
 - Dijkstra-, 57
 - Floyd-Warshall-, 62
 - Greedy-
 - zur Bestimmung eines maximalen Matchings, 79
 - zur Knotenfärbung, 118
 - Hierholzer-, 88
 - Kruskal-, 69
 - Prim-, 71
 - Verbessernde-Wege-, 81
 - zur Lösung des Postbotenproblems, 91
- Baum, 33
 - aufspannender, 35
 - binärer, 34
 - Blatt eines, 33
 - gewurzelter, 33
 - Kürzeste-Wege-, 43
 - minimal aufspannender, 66, 70
- Baumalgorithmus, 102
 - Gütegarantie des, 109
- Best-Successor-Algorithmus, 101
- BFS (Breadth First Search), 41
- Bipartiter Graph, 26
- Braess-Paradox, 133, 205
- Breitensuche, 41, 42, 152
- Brute-Force-Attacke, 55
- Cayley
 - Satz von, 35
- Chromatische Zahl, 117
- Chromatischer Index, 120
- Cliquen, 151
- Cluster, 151
 - lokaler, 147, 169, 172
- Cluster-Koeffizient
 - lokaler, 147, 169, 172
- Communities
 - Algorithmen zum Auffinden, 153
 - Algorithmus nach Newman und Girvan, 154
 - Klassifizierende Verfahren, 154
- Community, 151
- Dendrogramm, 154
- DFS (Depth First Search), 45
- Digraph, 28
- Dijkstra-Algorithmus, 57
- Direktbedarfsmatrix, 37
- Dreiecksungleichung, 99
- Dualität
 - zwischen Knoten- und Kantenfärbung, 122
- Durchschnittsgrad, 18
- Dynamik
 - Robustheit, 185
- Emergenz, 235
- Entfernungsmatrix, 32
- Epidemie
 - Homogene Modelle, 191
 - Impfung, 194
 - Netzwerkmodelle, 193
- Epidemische Ausbreitung, 187
- Euler
 - Satz von, 113
- Euler-Kreis, 84
- Euler-Weg, 84
- Explosion
 - kombinatorische, 52, 54
- Floyd-Warshall-Algorithmus, 62
- Forschungsprozess, 217
 - Datenbeschaffung, 223
 - Validierung, 221

- Verifikation, 220
- Versuchsplanung, 239
- GEW-Graph, 26
- Gozinto-Graph, 36
- Gozinto-Prozess, 38
- Grad
 - einer Knotenmenge, 77
 - eines Knotens, 18
- Graph, 16
 - n -partiter, 28
 - Adjazenzmatrix eines, 25
 - Barabasi-Albert-Zufalls-, 175
 - bewerteter, 29, 35
 - Bewertung eines, 29
 - bipartiter, 26, 27
 - Definition, 16
 - Durchschnittsgrad eines, 19
 - ebene Darstellung eines, 111
 - ebener, 111
 - einfacher, 28
 - Erdős-Renyi-Zufalls-, 165
 - eulerscher, 84, 86
 - gerichteter, 28
 - GEW-, 26
 - gewichteter, 29, 35
 - Gitter-, 163
 - Gozinto-, 36
 - hamiltonscher, 95, 97
 - Inzidenzmatrix eines, 25
 - isomorpher, 18
 - Isomorphie von, 18
 - k -färbbarer, 117
 - k -regulärer, 18
 - Kanten eines, 17
 - Knoten eines, 17
 - Konflikt-, 119
 - Kreis-, 163
 - Maximalgrad eines, 19
 - Minimalgrad eines, 19
 - Multi-, 28
 - plättbarer, 111
 - planarer, 111
 - schlichter, 28
 - Small-World-, 170
 - Taille eines, 114
 - Teilgraph eines, 25
 - vollständig n -partiter, 28
 - vollständig bipartiter, 27
 - vollständiger, 23
 - Watts-Strogatz-, 170
 - WS-, 172
 - zusammenhängender, 22
- Graphzeichnen, 226
- Greedy-Algorithmus zur Knotenfärbung, 118
- Greedy-Matching-Algorithmus, 79
- Hall
 - Satz von, 77
- Hamilton-Kreis, 95
 - Existenz eines, 98
- Hamilton-Kreise
 - Anzahl der, 99
- Handshaking-Lemma, 25
- Heuristik
 - Spanning-Tree-, 102
- Heuristiken, 100
- Hierholzer-Algorithmus, 88
- Index
 - chromatischer, 120
- Invertieren
 - eines verbessernden Weges, 80
- Inzidenz, 17
- Inzidenzmatrix, 25
- Isomorphie, 18
- k -regulär, 18
- Königsberger Brückenproblem, 15
- Kürzeste-Wege-Baum
 - Optimalitätskriterium, 56
- Kanten, 16
 - benachbarte, 17
- Kantenanzahl
 - des vollständig bipartiten Graphen, 27
 - des vollständigen Graphen, 24
- Kantenfärbung, 120
- Kantenzug, 21
- Kaskadeneffekten, 187
- Knoten, 16
 - Authorities, 147
 - benachbarte, 17
 - Entfernung zweier, 30
 - Grad, 18

- Hubs, 147
- isolierte, 18
- mit geradem Grad, 19
- mit ungeradem Grad, 19
- Knotenfärbung, 117
- Knotengrad, 18
 - mittlerer, 157
 - Standardabweichung, 157
 - zweites Moment, 157
- Knotengrade
 - Summe der, 20
- Kollektives in Netzwerken
 - Informationskaskaden, 211
 - Voting-Modell, 210
- Kollektives Verhalten in Netzwerken, 209
- Kombinatorische Explosion, 52
- Komponente, 151
 - größte (zusammenhängende), 153
- Konfidenzintervall, 239
- Konfliktgraph, 119
- Kreis, 22
- Kreuzungspunkt, 110
- Kreuzungszahl, 110
 - Abschätzung der, 114
- Kruskal-Algorithmus, 69

- Malloy-Reed-Kriterium, 185
- Matching, 74
 - Definition von, 74
 - Erweitern eines, 80
 - maximales, 75
 - perfektes, 75
- Maximalgrad, 19
- Minimalgrad, 19
- Modul, 151
- Modularität, 153, 154
- Multigraph, 28

- Netzwerk
 - durchschnittliche Netzwerkdichte, 158
 - globaler Cluster-Koeffizient, 161
 - Gradverteilung, 158
 - mittlere Pfadlänge, 160
 - mittlerer Cluster-Koeffizient, 161
 - Netzwerkdurchmesser, 160
- Netzwerke
 - assortative, 156
 - Beziehungs-, 126
 - disassortative, 156
 - homophile, 156
 - Interorganisations-, 127, 129
 - Kollaborations-, 128
 - navigierbare, 200
 - soziale, 128
 - Unternehmens-, 126
 - \mathcal{NP} -vollständiges Problem, 95
- Optimierung
 - kombinatorische, 52
- PageRank, 216
- Perkolationstheorie, 185
- Personen
 - Barabasi, 176
 - Erdős, 165
 - Gilbert, 165
 - Granovetter, 138
 - Milgram, 139
 - Moreno, 136
 - Price, 176
 - Rapoport, 137
 - Renyi, 165
 - Strogatz, 170
 - Watts, 170
- Pfeil, 28
- Planarität, 110
- Postbotenproblem, 83
 - Definition des, 91
- Prim-Algorithmus, 71
- Problem
 - \mathcal{NP} -vollständiges, 95
 - des chinesischen Postboten, 83
 - des Handlungsreisenden, 98, 99
 - Königsberger Brücken-, 15
 - Vier-Farben-, 116
- Robustheit von Netzwerken, 182
- Routing-Strategien, 202

- Satz
 - Vier-Farben-, 116
 - von Cayley, 35
- Satz von Euler, 110, 113
- Satz von Hall, 77
- Satz von Vizing, 122
- Schleife, 28

- Schlinge, 28
- Segregationsmuster, 156
- Sensitivitätsanalyse, 221
- Signifikanzniveau, 239
- Simulationsmodelle
 - agentenbasierte, 233
 - dynamische Prozesse, 236
 - Wachstum, 235
- Software-Anwendungen
 - Gephi, 227
 - Pajek, 228
- Softwarebasierte Methoden, 222
 - Erzeugung von Netzwerken, 225
- Soziogramm, 151
- Spieltheorie in Netzwerken, 213
- Statistische Größen
 - Durchmesser, 160
 - globaler Cluster-Koeffizient, 161
 - Häufigkeitsverteilung der Knotengrade, 158
 - mittlere Pfadlänge, 160
 - mittlerer Knotengrad, 157
 - Netzwerkdichte, 157
- Suche
 - in Netzwerken, 197
 - uninformierte, 47
- Taille eines Graphen, 114
- Teilgraph, 25
 - induzierter, 25
- Teilweg
 - kürzester, 56
- Tiefensuche, 45, 160
- Transport in Netzwerken, 201
 - Kaskaden, 205
 - Stau, 202
- TSP (Travelling Salesman Problem), 99
- Update, 57
- Validierung und Verifikation, 221
- Verbessernde-Wege-Algorithmus, 81
- Vermutung
 - Vier-Farben-, 116
- Vier-Farben-Satz, 116
- Virales Marketing, 211
- Vizing
 - Satz von, 122
- Vollständiger Graph, 23
- Wachstum
 - Erdős-Renyi-Zufallsgraphen, 165, 207, 212
 - Kreisgraphen, 164
 - Preferential Attachment, 176
 - Wachstumsmodell, 174
 - Watts-Strogatz-Modell, 170
- Wald, 33
- Weg, 21
 - geschlossener, 22
 - kürzester, 41, 53
 - offener, 22
 - verbessernder, 80
- Weglänge, 29
- Zahl
 - chromatische, 117
- Zentralitätsmaße, 146
 - Betweenness Centrality, 149
 - Closeness Centrality, 149
 - Degree Centrality, 149
- Zusammenhangskomponente, 22