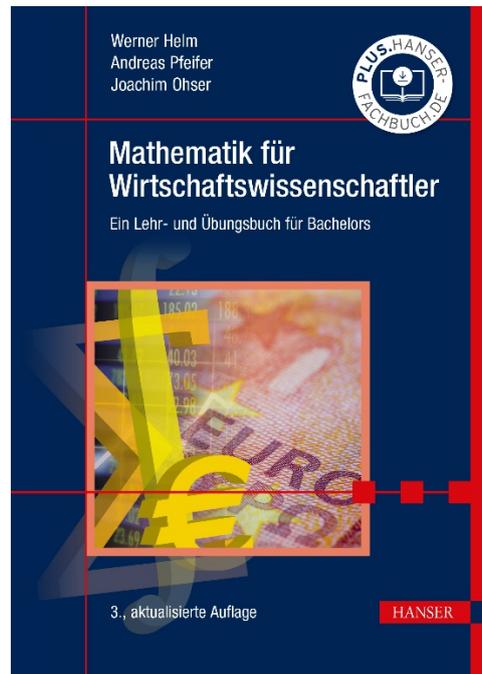


HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

von Werner Helm et al.

Print-ISBN: 978-3-446-46913-6

E-Book-ISBN: 978-3-446-46937-2

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/978-3-446-46913-6>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort zur 3. Auflage

Für die vorliegende dritte Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen und aktualisiert (wie beispielsweise der Einkommensteuertarif). Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und viele Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Auf plus.hanser-fachbuch.de finden Sie umfangreiches Zusatzmaterial, beispielsweise ein Zusatzkapitel über Differenzialgleichungen. Auch sind dort die Lösungen zu allen Aufgaben vorhanden. Ebenso zahlreiche Excel-Dateien zur Finanzmathematik, mit denen die Lösungen der Aufgaben einfach und leicht ermittelt werden können.

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehr- erfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der sechsten Auflage erschienenen Buches *Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte klassische Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Wir bedanken uns bei allen, die Anregungen und Korrekturvorschläge zu den Voraufagen gegeben haben. Auch über Hinweise und Bemerkungen zur neuen, dritten Auflage freuen wir uns.

Dezember 2020

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	13
1.1	Mathematische Grundbegriffe	13
1.1.1	Funktionsbegriff	13
1.1.2	Ein Funktionenreservoir	17
1.1.3	Eigenschaften von Funktionen	21
1.1.4	Umkehrfunktion	24
1.2	Funktionen für ökonomische Zusammenhänge	29
1.3	Funktionen und ökonomisches Wachstum	30
	Aufgaben 1.1 bis 1.18	33
2	Differenzialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	36
2.1	Einführung	36
2.2	Mathematische Grundlagen	37
2.2.1	Grenzwert	37
	Aufgaben 2.1 bis 2.6	43
2.2.2	Stetigkeit	44
2.2.3	Ableitung	47
	Aufgaben 2.7 bis 2.15	55
2.2.4	Differenzial	56
	Aufgabe 2.16	60
2.2.5	Untersuchung von Funktionen mithilfe ihrer Ableitungen	60
	Aufgaben 2.17 und 2.18	66
2.2.6	Nichtlineare Gleichungen in ökonomischen Problemen und deren Lösung	66
	Aufgaben 2.19 und 2.20	70
2.3	Ökonomische Probleme und Ableitungen von Funktionen	71
	Aufgaben 2.21 bis 2.29	78
2.4	Reagibilität und Ableitungen	79
	Aufgaben 2.30 bis 2.41	96
2.5	Extremwertaufgaben der Ökonomie	98
2.5.1	Extrema für Kostenfunktionen	98
	Aufgaben 2.42 bis 2.48	109
2.5.2	Gewinnmaximum	110
	Aufgaben 2.49 bis 2.57	140
2.6	Die Regel von de L'HOSPITAL	142
	Aufgabe 2.58	145
2.7	Reihen und Potenzreihen	145
2.7.1	Reihen	145
2.7.2	Potenzreihen	150

2.8	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe	153
2.8.1	MACLAURINSche Reihen	153
2.8.2	Allgemeine TAYLOR-Reihen	157
	Aufgaben 2.59 bis 2.61	158
2.9	Komplexe Zahlen	159
2.9.1	Definition und Darstellung komplexer Zahlen	159
2.9.2	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	163
3	Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.1	Definition und Darstellungsform von Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.2	Partielle Differenziation	172
	Aufgaben 3.1 bis 3.3	175
3.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	175
	Aufgabe 3.4	177
3.4	Tangentialebene und das totale Differenzial	178
3.4.1	Geometrische Betrachtungen	178
	Aufgabe 3.5	179
3.4.2	Das totale Differenzial	179
3.5	Spezielle Ableitungstechniken	181
3.5.1	Differenziation nach einem Parameter	181
3.5.2	Implizite Differenziation	182
3.6	Anwendungen	182
3.6.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	183
3.6.2	Lokale Extrema und Sattelpunkte	185
3.6.3	Fehlerrechnung	190
3.6.4	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	191
	Aufgaben 3.6 bis 3.8	194
4	Integralrechnung	195
4.1	Integration als Umkehrung der Differenziation – das unbestimmte Integral	195
	Aufgaben 4.1 bis 4.3	202
	Aufgabe 4.4	203
4.2	Das bestimmte Integral – Hauptsatz der Integralrechnung	204
	Aufgaben 4.5 und 4.6	209
4.3	Uneigentliche Integrale	209
4.4	Geometrische Anwendungen	211
4.4.1	Flächenberechnung	211
4.4.2	Länge einer Kurve	213
4.4.3	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	214
4.5	Anwendung der Integralrechnung in ökonomischen Zusammenhängen	216
4.6	Numerische Integration	219
	Aufgabe 4.7	221
4.7	Doppelintegrale	221
4.7.1	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	221

4.7.2	Doppelintegrale in Polarkoordinaten	224
	Aufgabe 4.8	227
5	Lineare Algebra in Betriebs- und Volkswirtschaft	228
5.1	Einführende Beispiele ökonomischen Inhalts	228
	Aufgaben 5.1 und 5.2	231
5.2	Mathematische Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung	231
5.2.1	Matrizen und Vektoren sowie ihre Spezifizierungen	232
	Aufgaben 5.3 und 5.4	236
5.2.2	Rechnen mit Matrizen und Vektoren	236
	Aufgaben 5.5 bis 5.8	245
5.2.3	Inverse Matrix	245
	Aufgaben 5.9 bis 5.12	251
5.2.4	GAUSSScher Algorithmus	252
	Aufgaben 5.13 und 5.14	257
5.2.5	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	258
	Aufgaben 5.15 bis 5.17	262
5.3	Matrizen und Vektoren in Betriebs- und Volkswirtschaft	263
	Aufgaben 5.18 bis 5.22	272
5.4	Mathematische Grundlagen linearer algebraischer Gleichungssysteme	275
5.4.1	Einführung	275
5.4.2	Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme: Begriff und Methode	277
	Aufgaben 5.23 bis 5.25	280
5.4.3	GAUSSScher Algorithmus zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme	281
	Aufgaben 5.26 bis 5.30	291
5.4.4	Basislösungen	292
	Aufgaben 5.31 bis 5.36	298
5.4.5	Zusammenfassende Aussagen über lineare algebraische Gleichungssysteme	299
	Aufgaben 5.37 bis 5.40	301
5.5	Lineare algebraische Gleichungssysteme in Betriebs- und Volkswirtschaft	302
	Aufgaben 5.41 und 5.42	310
5.6	Determinante einer Matrix	311
	Aufgaben 5.43 und 5.44	314
5.7	Das Eigenwertproblem für quadratische Matrizen	315
	Aufgabe 5.45	319
6	Lineare Optimierung in Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft	320
6.1	Problemstellungen und Grundbegriffe	320
6.1.1	Aufgabenstellung und Beispiele	320
6.1.2	Das Rechnen mit Ungleichungen	323
6.1.3	Die grafische Lösung	326
6.1.4	Allgemeine mathematische Formulierung des linearen Optimierungsproblems	331
6.2	Der Simplex-Algorithmus	333
6.2.1	Die Grundideen des Simplex-Verfahrens	333
6.2.2	Der Austauschschritt im Simplex-Tableau	334

6.2.3	Die Simplex-Regeln	338
6.2.4	Der Simplex-Algorithmus (Phase II)	340
6.2.5	Theoretische Ergänzungen und Sonderfälle	341
6.3	Der Simplex-Algorithmus für allgemeine lineare Programme	343
6.3.1	Minimumprobleme, Gleichungsrestriktionen, Varianten der Vorzeichen- beschränkungen, obere und untere Schranken	343
6.3.2	Simplex-Algorithmus: Phase I und Phase II	346
6.4	Dualität	348
6.4.1	Primal-Dual-Beziehung und Dualitätssätze	348
6.4.2	Primal-Dual-Beziehung und Komplementarität	351
6.4.3	Dualer Simplex-Algorithmus (Phase III)	353
6.4.4	Ökonomische Interpretationen der Größen in den Simplex-Tableaus	356
6.5	Weiterführende Aspekte	357
6.5.1	Modellbildung	357
6.5.2	Spezialfälle linearer Optimierung	359
6.5.3	Sensitivitätsanalyse bei der linearen Optimierung	362
6.5.4	Parametrische (lineare) Optimierung	363
6.5.5	Effizienz und Vergleich von LP-Solvern	363
6.5.6	Ganzzahlige lineare Optimierung	363
6.5.7	Nichtlineare Optimierung	364
	Aufgaben 6.1 bis 6.11	364
7	Finanzmathematik	368
7.1	Zinsrechnung	369
7.1.1	Einfache Zinsen und Zinseszinsen	369
7.1.2	Vorschüssige Verzinsung	375
7.1.3	Gemischte Verzinsung	377
7.1.4	Unterjährige Verzinsung	378
7.1.5	Stetige Verzinsung	380
	Aufgaben 7.1 bis 7.11	381
7.2	Barwert, Äquivalenz und Rendite	382
7.2.1	Barwert und Äquivalenz	382
7.2.2	Kapitalwertmethode	384
7.2.3	Rendite	386
7.2.4	Mittlerer Zahlungstermin und Duration	390
	Aufgaben 7.12 bis 7.20	391
7.3	Rentenrechnung	392
7.3.1	Nachschüssige und vorschüssige Renten	392
7.3.2	Aufgeschobene, abgebrochene und ewige Rente	398
7.3.3	Jährliche Verzinsung – unterjährige Rentenzahlung	400
7.3.4	Unterjährige Verzinsung	405
	Aufgaben 7.21 bis 7.31	406
7.4	Kreditrechnung	408
7.4.1	Grundbegriffe	408
7.4.2	Ratentilgung	410

7.4.3	Annuitätentilgung	410
7.4.4	Unterjährige Verzinsung, Tilgung und Rückzahlung	414
7.4.5	Ratenkredit	421
	Aufgaben 7.32 bis 7.41	422
7.5	Kurs- und Renditerechnung	424
7.5.1	Grundlagen	424
7.5.2	Zinsschuld	425
7.5.3	Annuitätenschuld	429
	Aufgaben 7.42 bis 7.48	433
7.6	Abschreibung	434
7.6.1	Grundlagen	434
7.6.2	Lineare Abschreibung	435
7.6.3	Geometrisch-degressive Abschreibung	436
7.6.4	Weitere Abschreibungsarten	437
7.6.5	Vergleich linearer und geometrisch-degressiver Abschreibung	439
	Aufgaben 7.49 bis 7.55	441
7.7	Weitergehende Betrachtungen	442
7.7.1	Rendite und Risiko	442
7.7.2	„Neuere“ Finanzprodukte	444
	Aufgaben 7.56 bis 7.58	445
8	Weitere praktische Probleme und deren Lösung	446
8.1	Nichtlineare Optimierung	446
8.1.1	Problemstellung, Grundlagen und grafische Lösungen	447
8.1.2	Karush-Kuhn-Tucker-Theorie (KKT-Theorie)	454
8.1.3	Nichtlineare Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	458
8.1.4	Bausteine der allgemeinen NLP-Techniken (Übersicht)	460
	Aufgaben 8.1 bis 8.5	462
8.2	Problemlösungen mit einem Standard-Software-System	462
8.2.1	Allgemeine LP-Probleme	463
8.2.2	Ausgewählte NLP-Probleme	467
8.2.3	Portfolio-Probleme	468
8.2.4	Transportprobleme	471
8.2.5	Zuordnungsprobleme	473
8.2.6	Netzwerkprobleme	474
8.2.7	Netzplantechniken	476
8.2.8	Kundenwanderung	483
8.2.9	Verwaltung von Modellen: Algebraische Eingabe und Solver	485
	Literaturverzeichnis	488
	Sachwortverzeichnis	490

1

Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	8,6 $\bar{3}$	7	6,5	6,9 $\bar{6}$	8,33	10,55

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P; K)$ bzw. $(P; k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** f . Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f ; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.

Als Symbole dienen

$$f: M_1 \rightarrow M_2 \quad \text{oder ausführlicher} \quad (1.1a)$$

$$y = f(x), x \in D(f). \quad (1.1b)$$

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,

y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell“ künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y , die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift“ und „Definitionsbereich“ (siehe 1.1b)¹⁾. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x - 3)^2 + 1$, so gilt hier $(x - 3)^2 \geq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:

$$f_2(x) \geq f_2(5) = 5. \quad \blacksquare$$

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0,5x + 1$, $-3 \leq x \leq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

¹⁾ Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, besteht.

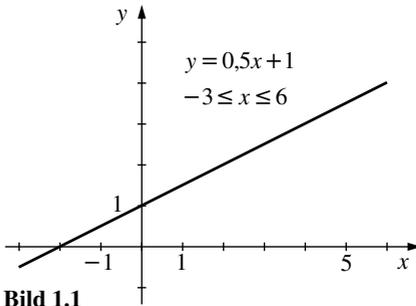


Bild 1.1

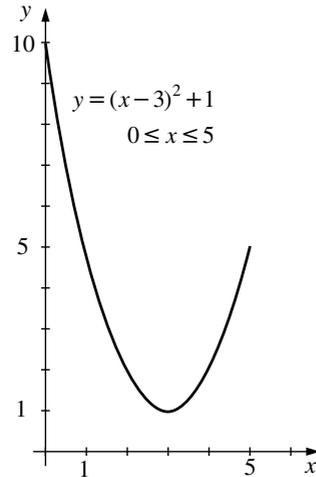


Bild 1.2

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

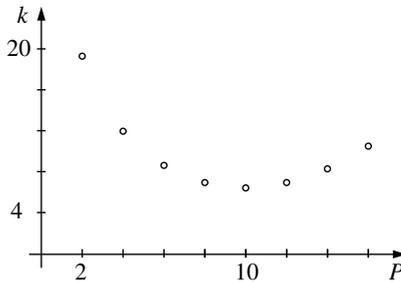


Bild 1.3

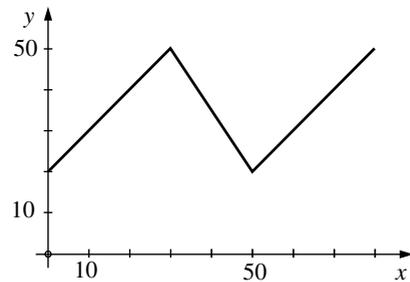


Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt.

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Parallelen zur horizontalen Achse des kartesischen Koordinatensystems den Graphen einer Funktion durchaus in mehr als einem Punkt schneiden. Das gilt beispielsweise für die in den Bildern 1.2 und 1.4 dargestellten Graphen.

BEISPIEL

1.5 Kurven, die nicht Graph einer Funktion sind

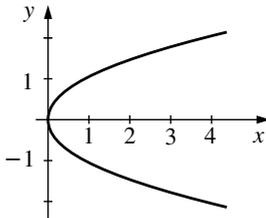


Bild 1.5

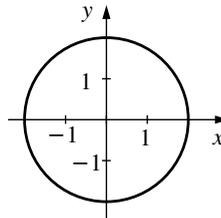


Bild 1.6

■

Die Vorgabe von Funktionen kann auf sehr vielfältige Weise erfolgen. Genannt seien hier folgende Möglichkeiten:

- M1: Wertetabelle (siehe *Tabelle 1.1*)
- M2: Analytische Vorgabe in der Form $y = f(x)$, $x \in D(f)$, wobei $f(x)$ ein mathematischer Term ist (vgl. *Beispiel 1.3*).
- M3: Grafische Vorgabe durch eine Kurve im kartesischen Koordinatensystem, die von Parallelen zur vertikalen Achse höchstens einmal geschnitten wird (s. *Bilder 1.1* und *1.2*).
- M4: Vorgabe in zusammengesetzter Form, d. h. durch unterschiedliche Zuordnungen in verschiedenen Teilen des Definitionsbereiches. *Bild 1.4* zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Ihre analytische Vorgabe ist durch

$$y = \begin{cases} x + 20 & \text{für } 0 \leq x \leq 30 \\ -1,5x + 95 & \text{für } 30 < x < 50 \\ x - 30 & \text{für } 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

gegeben.

- M5: Implizite Vorgabe durch eine Gleichung der Art $g(x, y) = 0$. Dabei muss $g(x, y)$ ein mathematischer Term sein, der jedem x aus einer gewissen Menge reeller Zahlen genau einen Wert y zuordnet.

BEISPIEL

1.6 Eine Preis-Absatz-Relation als implizite Funktion

Von zwei Produkten A und B sei bekannt, dass Produkt A einen festen Preis p_A erzielt, während der Preis von B mit der abgesetzten Menge sinkt. Die konkrete Preis-Mengen-Funktion sei zu $p_B(y) = 10.000/(50 + 4y)$, $10 \leq y \leq 100$, ermittelt worden, wobei y die von B abgesetzte Menge angibt. Wird die von A abgesetzte Menge mit x bezeichnet, so liefert die Summe $p_A x + p_B(y)y$ den beim Absatz von x und y erzielten Erlös E : $p_A x + p_B(y)y = E$. Soll nun ein ganz bestimmter Erlös E_0 erzielt werden, so ist das mit verschiedenen Kombinationen der Absatzmengen x und y möglich. Sie müssen der Relation $p_A x + p_B(y)y = E_0$ oder

$$g(x, y) = 0 \quad \text{mit} \quad g(x, y) = p_A x + \frac{10.000}{50 + 4y} y - E_0$$

genügen, wobei jeder zulässigen Absatzmenge x genau eine Absatzmenge y zugeordnet ist (s. Aufgabe 1.11). ■

1.1.2 Ein Funktionenreservoir

Funktionen, die bei der Bearbeitung ökonomischer Phänomene auftreten, besitzen in vielen Fällen einen recht einfachen Aufbau. Wir wollen sie unter der Bezeichnung „elementare Funktionen“ zusammenfassen. Sie bilden das Funktionenreservoir, mit dem wir uns im Weiteren beschäftigen wollen. Ihre Bausteine sind einige wenige **Grundfunktionen**. Dazu zählen:

Potenzfunktionen

$$y = x^n, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \text{wobei } \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2)$$

$$y = x^k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (1.3)$$

Die Graphen von Potenzfunktionen mit positivem Exponenten n sind Parabeln n -ten Grades. Sie verlaufen alle durch die Punkte $(0; 0)$ und $(1; 1)$. Für geradzahlige Exponenten n verlaufen die Parabeln außerdem immer durch den Punkt $(-1; 1)$, für ungeradzahlige Exponenten n dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1; -1)$ (siehe Bild 1.7).

Die Graphen von Potenzfunktionen mit negativem Exponenten k sind Hyperbeln. Sie verlaufen alle durch den Punkt $(1; 1)$. Für geradzahligen Exponenten k verlaufen die Hyperbeln außerdem immer durch den Punkt $(-1; 1)$, für ungeradzahligen Exponenten k dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1; -1)$ (siehe Bild 1.8).

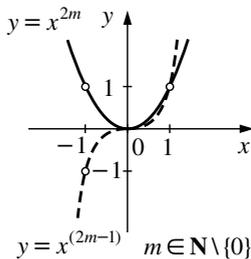


Bild 1.7

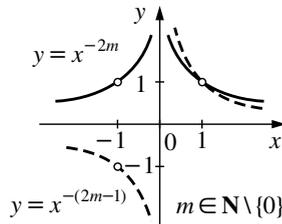


Bild 1.8

Wurzelfunktionen

$$y = x^a, \quad a = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad a \notin \mathbf{N}, \quad x \in [0, +\infty). \quad (1.4)$$

Die Graphen von Wurzelfunktionen beginnen im Koordinatenursprung $(0; 0)$ und verlaufen alle durch den Punkt $(1; 1)$. Sie liegen ausschließlich im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Für die Spezialfälle $a = \frac{1}{q}, q \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ sind die Graphen Parabeläste; für diese Spezialfälle mit ungeraden q kann der Definitionsbereich auf ganz \mathbf{R} ausgedehnt werden.

BEISPIEL**1.7** Wurzelfunktion mit dem Exponenten 0,1

Die Funktion $y = x^{0,1}$, $0 \leq x < +\infty$, nimmt beispielsweise für $x = 2$ den Funktionswert $y = 1,0718$ an, den man u. a. mit einem Taschenrechner durch die Eingabenfolge $2 [y^x] 0,1 [=]$ erhält. ■

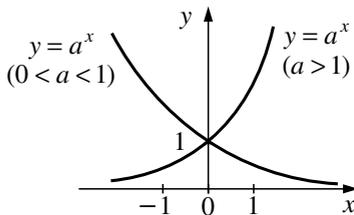
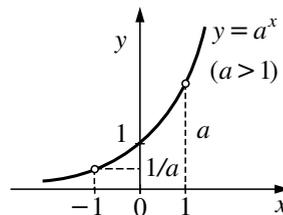
Potenz- und Wurzelfunktionen können zusammengefasst und auf beliebige Exponenten a verallgemeinert werden:

$$y = x^a, \quad a \in \mathbf{R}, x \in (0, +\infty). \quad (1.5)$$

Exponentialfunktionen

$$y = a^x, \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x \in \mathbf{R}. \quad (1.6)$$

Die Graphen von Exponentialfunktionen liegen ausnahmslos in der oberen Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt $(0; 1)$. Für ein konkretes a verläuft der entsprechende Graph darüber hinaus durch die beiden Punkte $\left(-1; \frac{1}{a}\right)$ und $(1; a)$ (s. *Bilder 1.9a, 1.9b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.6).

**Bild 1.9a****Bild 1.9b**

In enger Beziehung zu den Exponentialfunktionen stehen die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x, \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x > 0. \quad (1.7)$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen liegen ausnahmslos in der rechten Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt $(1; 0)$. Man erhält sie durch Spiegelung der Graphen entsprechender Exponentialfunktionen an der Geraden $y = x$. Daher verläuft auch für ein konkretes a der zugehörige Graph der Logarithmusfunktion durch die beiden Punkte $\left(\frac{1}{a}; -1\right)$ und $(a; 1)$ (s. *Bilder 1.10a, 1.10b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.7).

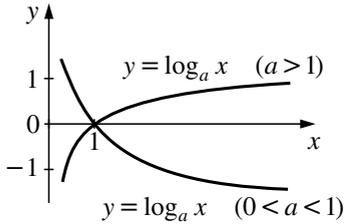


Bild 1.10a

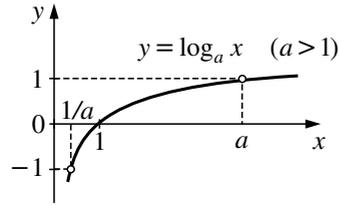


Bild 1.10b

Für die Werte $a = e$ (e die Eulersche Zahl, $e \approx 2,718\,28$ – natürliche Wachstumskonstante), $a = 2$ und $a = 10$ ergeben sich spezielle Logarithmusfunktionen:

$$y = \log_e x = \ln x, \quad x > 0, \quad (1.7a)$$

$$y = \log_2 x = \text{ld } x, \quad x > 0, \quad \text{und} \quad (1.7b)$$

$$y = \log_{10} x = \text{lg } x, \quad x > 0. \quad (1.7c)$$

In älteren Tafelwerken sind $\ln x$ und $\text{lg } x$ noch tabelliert. Heute sind auf einschlägigen Taschenrechnern entsprechende Funktionstasten vorhanden.

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

$$y = \sin x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.8a)$$

$$y = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.8b)$$

$$y = \tan x, \quad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbf{N}, \quad (1.9)$$

$$y = \cot x, \quad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \pm k\pi, k \in \mathbf{N}. \quad (1.10)$$

Die *Bilder 1.11* und *1.12* zeigen Teile der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

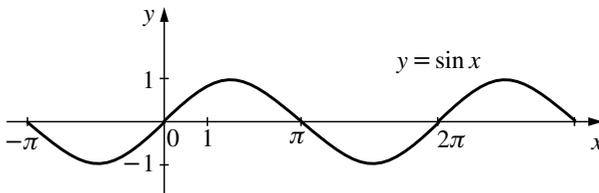


Bild 1.11

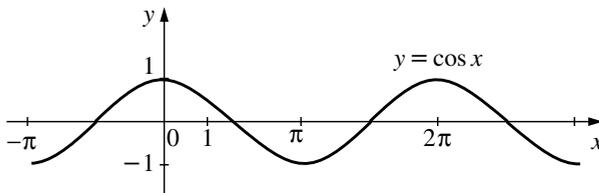


Bild 1.12

Von den trigonometrischen Funktionen können insbesondere $y = \sin x$ und $y = \cos x$ bei der Untersuchung von Saisonschwankungen und Konjunkturerscheinungen von Bedeutung sein.

Als letzte Gruppe der Grundfunktionen seien die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten **Arkusfunktionen**, hier erwähnt.

Werden die Grundfunktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division¹⁾ und/oder Verkettung miteinander verknüpft, so ergeben sich neue Funktionen. Werden auf sie ebenfalls uneingeschränkt die genannten Verknüpfungen angewandt, so ergibt sich ein unerschöpfliches Reservoir von Funktionen. Jede auf diese Weise gebildete Funktion wollen wir **elementare Funktion** nennen.

Die Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division¹⁾ zweier Funktionen setzen voraus, dass beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich haben. Sie bestehen dann einfach in der Ausführung der entsprechenden algebraischen Operationen mit den Funktionswerten.

BEISPIELE elementarer Funktionen:

- 1.8** Mit $y = 3 - 5x + 7x^2 - 9x^3$, $x \in \mathbf{R}$, ist eine Summe bzw. Differenz von Potenzfunktionen gegeben. Allgemein spricht man bei Summen bzw. Differenzen von Potenzfunktionen von **Linearkombinationen** von Potenzfunktionen. Sie werden kurz **Polynome** genannt.
- 1.9** Mit $y = (1 + x^2)(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$, ist das Produkt einer Summe und einer Differenz von Potenzfunktionen, d. h. das Produkt zweier Polynome gegeben.
- 1.10** Mit $y = (1 + x^2)/(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$ und $x \neq \pm 1$, ist der Quotient zweier Polynome und damit ein Beispiel für rationale Funktionen gegeben. ■

Die **Verkettung** zweier Funktionen g und h zu einer neuen Funktion f besteht darin, die Funktionswerte $g(x)$ als Argumente der Funktion h einzusetzen:

$$f(x) = h(g(x)), \quad x \in D(f) = D(g). \quad (1.11)$$

Der Term $h(g(x))$ ist nur sinnvoll, wenn der Funktionswert $g(x)$ zum Definitionsbereich von h gehört. Deshalb erfordert die Bildung der verketteten Funktion (1.11) die Bedingung $W(g) \subseteq D(h)$ als Voraussetzung. Gegebenenfalls muss der Definitionsbereich von g entsprechend eingeschränkt werden (s. *Beispiel 1.11*). Damit ist auch klar, dass man die Reihenfolge bei der Verkettung zweier Funktionen einhalten muss. Im Falle der verketteten Funktion (1.11) nennt man g die **innere Funktion** und h die **äußere Funktion**.

BEISPIEL

1.11 Verkettete Funktion

Die Funktion $y = \sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x \geq 1$, kann als Verkettung der inneren Funktion $g(x) = (x-1)(x^2+1)$, $x \geq 1$, und der äußeren Funktion $h(g) = \sqrt{g}$, $g \geq 0$, aufgefasst werden. Da die innere Funktion eine elementare Funktion, die äußere sogar eine Grundfunktion darstellen, gehört die gegebene verkettete Funktion ebenfalls zu den

¹⁾ Bei der Division zweier Funktionen muss natürlich der Divisor von null verschieden sein.

Sachwortverzeichnis

A

Ableitung 53
– an der Stelle 48
– einer Umkehrfunktion 53
–, linksseitige 53
–, partielle 172
–, rechtsseitige 53
Absatz, gewinnmaximierender 135
Absatzmenge, Berechnung der gewinnextremen 123
–, gewinnmaximierende 111, 131, 135
Abschreibung 434
–, arithmetisch-progressive 438
–, degressive, in Staffelbeträgen 439
–, digitale 437
–, geometrisch-degressive 436, 439
–, lineare 435, 439
–, progressive 438
absoluter Term 276
Abzinsungsfaktor 372
AfA 435
AIBD-Methode 389
Aktivität 357
AMOROSO-ROBINSON-Relation 95
Anfangswert 31
Annuität 408
Annuitätendarlehen 408
Annuitätenschuld 429
Annuitätentilgung 408, 410
Äquivalenz 382
Argument 14
Arkusfunktion 20
atan2 162
Aufgeld 426
Aufzinsungsfaktor 372
Ausstattungsgrad 21
Austauschschritt 290, 334

B

barrier functions 461
Barriere-Methode 461
Barwert 369, 382 f.
Basis-Inverse 341

Basislösung 292
–, degeneriert 294
Basislösung (BL), zulässige (ZBL) 334
Basisvariable 295
Basisvariable (BV) 334
Betrag einer komplexen Zahl 161
Betriebsminimum 103
Betriebsoptimum 99
Bilanzgleichung 267
Bildpunkt 14
BLAND-Regel 340
Bogenlänge 213
Buchwert 435
Bundesschatzbrief 387

C

Call 444
charakteristische Gleichung 316
charakteristisches Polynom 316
COURNOTScher Punkt 133
CPM 476
CPM-Netzplan 477

D

DANTZIG-Regel 342
Definitionsbereich 13, 169
degeneriert 328
Degressionsbetrag 437
Determinante einer Matrix 311
Diagonalmatrix 234
Differenzenquotient 47
Differenzial 57
–, Interpretation 58
–, totales 180
Differenziation, implizite 182
differenzierbar 48, 53
–, linksseitig 53
–, rechtsseitig 53
DIRICHLET-Funktion 45
Disagio 418
Diskontierungsfaktor 372
Doppelindex 230
Doppelintegral, Polarkoordinaten 225

Dreiecksmatrix, obere 234
 –, untere 234
 duales Problem (D) 348
 Dualität 348
 Dualitätssatz, schwacher 350
 –, starker 350
 Duration 391
 Durchschnittsertrag 73
 Durchschnittsfunktion 94
 Durchschnittskosten 99
 Durchschnittskostenfunktion 30
E
 Eckpunkt 327
 Effektivverzinsung 386, 431
 Effektivzins, anfänglicher 431
 Eigenvektor 305, 315
 Eigenwert 315
 Eigenwertgleichung 316
 Einflussgröße 29
 Einheitsmatrix 234
 Einheitsvektor 234
 elastisch 85
 Elastizität 82
 – der Kosten bezüglich des Outputs 84
 – des Absatzes bezüglich des Preises 84
 – des Outputs bezüglich des Inputs 84
 – gleich 1 82
 –, Interpretation 83
 Ellipsoid-Methode 320
 Endkapital 369
 entartet 328
 Entartung 341
 Entwicklungsgleichung 32
 Ereignis 476
 erlaubter Bereich 362
 Erlösfunktion 30
 Ersatzrente 400
 Ertragsentwicklung, Phasen 73
 Ertragsgesetz, klassisches 30, 71 f.
 –, Schwelle 99
 ertragsgesetzliche Produktionsfunktion 73
 EULER
 –, Formel 162
 Exponentialfunktion 18, 31
 Extrema, für Kostenfunktionen 98
 Extremalstrahl 331, 343
 Extremum 61
 –, lokal 185
 Extremwertaufgabe, ökonomischen Inhalts 98

F
 Fahrstrahl, tangentialer 113
 Faktorgröße 29
 FALKSches Rechenschema 242
 FAT 478
 Fehlerfortpflanzung, GAUSSsche 190
 –, linear 190
 –, quadratisch 190
 FET 478
 Folge 38
 – konvergiert, strebt 37
 Fundamentalsystem von Lösungen 291
 Funktion 13, 169
 –, äußere 20
 –, beschränkt 22
 –, charakteristische 45
 –, eineindeutig 25
 –, elementare 17, 20
 –, implizite 16
 –, innere 20
 –, integrierbar 206
 –, kleinster und größter Wert 63
 –, konkav 23
 –, konvex 23 f.
 –, linksgekrümmt 23
 –, linksseitig stetig 44
 –, monoton fallend 22
 –, monoton wachsend 22
 –, nach oben beschränkt 22
 –, nach unten beschränkt 22
 –, rechtsgekrümmt 23
 –, rechtsseitig stetig 44
 –, Stamm- 195
 –, stetig 44
 –, stetig an der Stelle 44
 –, stetig im Intervall 44
 –, streng konkav 23
 –, streng konvex 23
 –, streng monoton fallend 22
 –, streng monoton wachsend 22
 –, trigonometrische 19
 Funktionsrelation 14
 Funktionsterm 14
 Funktionswert 14
 –, größter 45
 –, kleinster 45
 Futtermittelmischung 230
G
 GANTT-Chart 480
 GAUSSsche Zahlenebene 160

GAUSSscher Algorithmus 256
GAUSS-NEWTON-Verfahren 183
GAUSSscher Algorithmus, Endform 333
Gegenwartswert 382 f.
Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs 71
gewinnextremaler Pfad 120
–, Gleichung 125
Gewinnextremum, grafische Ermittlung 123
Gewinnfunktion 30
Gewinngrenze 69, 111, 130
Gewinnlinse 113, 130
gewinnmaximale Menge, zulässige 136
gewinnmaximierende Menge, zulässige 138
Gewinnmaximum bei vollständiger Konkurrenz 111
–, grafische Ermittlung 122
– im Falle des Angebotsmonopols 130
Gewinnschwelle 69, 111, 130
Gewinnzone 111, 130
Gleichgewichtspreis 67
Gleichungssystem 275
–, lineares algebraisches 275
Gradient 173
Gradientenmethode 459
Graphen 14
greatest change 342
Grenzerlös 78
Grenzfunktion 81
–, Interpretation 82
Grenzgewinn 78
Grenzkosten 78, 99
Grenzpreis 130
Grenzprodukt 59
Grenzproduktivität 59, 72
Grenzwert 37
– der Funktion 41
– der Funktion, linksseitiger 42
– der Funktion, rechtsseitiger 42
Grundfunktion 17

H

Halbebene 324
Halbraum 324
Hauptdiagonale 234
Hauptsatz der Integralrechnung 207
HESSE-Matrix 177, 452
homogener Zusammenhang 88
homogenes lineares Gleichungssystem 316
Homogenitätsgrad 88 f.
Homogenitätsregel 50

I

imaginäre Einheit 159
Imaginärteil 160
implizite Differenziation 182
Innere-Punkt-Methode 320
Input 267
Inputelastizität des Outputs 84
Input-Output-Koeffizient 268
Input-Output-Modell 266
Input-Output-Tabelle 230
Integral, bestimmtes 206
–, unbestimmtes 196
Integrale, uneigentliche 209
Integrand 196
Integration nach Partialbruchzerlegung 198
– nach Substitution 197
–, partielle 197
– von Differenzen 197
– von Summen 197
Integrationskonstante 196
integrierbar 206
Inverse 246
Investition 384
ISMA-Methode 389
Iteration, heuristische 67
Iterationsverfahren 395

J

JACOBI-Matrix 183, 186, 225, 451

K

Kalkulationszinssatz 384
Kandidaten für relative Extrempunkte 447
kanonische Form, zulässige 334
Kapitalisierungsfaktor 399
Kapitalwert 384
Kapitalwertmethode 384
Karenzzeit 398
Kaufoption 444
Kehrmatrix 246
KEPLERSche Fassregel zur numerischen Integration 220
Kettenregel 51, 181
KKT-Bedingung 455
KKT-Methode 454
KKT-Theorie 454
Koeffizientenmatrix 276
komplementäre Variable 352
komplementärer Schlupf 353
komplexe Zahlen 160
–, algebraische Form 161

- , Differenz 164
 - , exponentielle Form 162
 - , kartesische Form 161
 - , Produkt 165
 - , Quotient 167
 - , Summe 164
 - , trigonometrische Form 162
 - konjugiert komplex 161
 - Konsumfunktion 30
 - Konsumquote 78
 - Konvergenzbereich einer Potenzreihe 151
 - Konvergenzradius einer Potenzreihe 151
 - konvex 452
 - Konvexität 452
 - , strenge 24
 - Konvexkombination 326
 - Kosten, durchschnittliche variable 103
 - , fixe 103
 - , variable 103
 - Kostenelastizität 84
 - Kostenentwicklung, vier Phasen 104
 - Kostenfunktion 21, 29 f.
 - , ertragsgesetzliche 21
 - , ertragsgesetzliche vom Polynomtyp 108
 - , neoklassische 27
 - Kreditrechnung 408
 - Kreuzprodukt 312
 - kritisch 477
 - kritischer Weg 478
 - Krümmungsverhalten 24
 - Kundenwanderung 230, 263
 - Kurs 425
 - Kursrechnung 424
- L**
- LAGRANGE-Funktion 192, 448, 455
 - LAGRANGE-Multiplikator 192 f., 448
 - Länge einer Kurve 213
 - LEIBNIZ-Kriterium für Reihen 147
 - Leibrente 392
 - Leistungsabschreibung 438
 - Leistungsverflechtung 228
 - LEONTIEF-Koeffizient 268
 - LEONTIEF-Modell 268
 - LGS 275
 - L'HOSPITALSche Regel 142
 - Line Search-Problem 458
 - lineares algebraisches Gleichungssystem 275
 - , allgemeine Lösung 287
 - , Basislösung 292
 - , Fundamentalsystem von Lösungen 291
 - , gestaffelt 278
 - , homogenes 276
 - , inhomogenes 276
 - , kanonische Normalform 281
 - , Koeffizienten 275
 - , nichttriviale Lösung 278
 - , Normalform 275
 - , spezielle Lösung 288
 - , triviale Lösung 278
 - , Zahl der Freiheitsgrade 283
 - lineares Optimierungsproblem 331
 - lineares Programm 331
 - Linearität 40
 - Linearitätsregel 50
 - Linearitätsrelation 276
 - Linearkombination 20, 40
 - , konvexe 238
 - von Funktionen 42
 - linksgekrümmt 24
 - Logarithmusfunktion 18
 - LP-Problem 331
 - LP-Solver 363
- M**
- MACLAURINSche Reihe 153, 162
 - Mantelfläche eines Rotationskörpers 214
 - Marktanteil 263
 - , Vektor 264
 - Marktaufteilung, stationäre 264
 - Markträumungsbedingung 67
 - Marktzinssatz 383
 - Materialverbrauchsnorm 229
 - Materialverflechtung 229
 - Matrix 232
 - , Differenz 237
 - , elementare Umformung 253
 - , Elemente 232
 - , gleiche 236
 - , inverse 246
 - , Ordnung 233
 - , quadratische 233
 - , Rang 261
 - , regulär 247, 312
 - , singulär 247
 - , Spalte 232
 - , Summe 237
 - , symmetrische 235
 - , transponierte 235
 - , Typ 232

–, verkettbar 241
–, verknüpfbar 241
–, verträglich 241
–, Zeile 232
maximaler Fluss 474
Maximum 61
–, absolutes 61
–, lokales 185
–, relatives 61
max-NLP 454
Methode des steilsten Abstiegs 459
Minimum 61
–, absolutes 61
–, lokales 185
–, relatives 61
min-NLP 454
Mischungsproblem 322
Mittelwertsatz der Integralrechnung 206
Modellbildung 357
Monopol 110
MPM-Netzplan 477

N
N 17
Näherungsformel für den Zuwachs 57
Nebenbedingung 322
Nebendiagonale 234
Nettobarwert 384
Netzplantechnik 476
Netzwerk 361
Netzwerkproblem 474
Netzwerk-Simplex-Algorithmus 471
NEWTON-RAPHSON mit Ridging 459
NEWTON-RAPHSON-Verfahren 459
Newton-Verfahren 395
–, eindimensionales 450
–, mehrdimensionales 451
– NEWTON-Verfahren 68
Nichtbasisvariable 295
Nichtbasisvariable (NBV) 334
nichtlineare Optimierung 446
nichtlineares Optimierungsproblem 446
nichtlineares Programm 446
Nichtnegativitätsbedingung 322
NLP-Problem 446
–, grafisch 457
Nominalzinssatz 409
Norm (Länge) des Vektors 245
Normalform 333
Nullfolge 38

Nullmatrix 233
Nullvektor 234
numerische Integration 219
Nutzungsdauer 435

O
Oberfläche eines Rotationskörpers 214
ökonomische Interpretation 356
Operations Research 320
Opportunitätskosten 356
Opportunitätszinssatz 384
Optimierung, nichtlineare 446
Optimierungsproblem, lineares 331
–, nichtlineares 446
–, quadratisches 469
Option 444
Output 266
Outputelastizität der Kosten 84
Outputnorm, vollständige 306

P
Parameter, frei wählbar 289
Parameter Estimate 471
partielle Ableitung 172
penalty functions 461
Penalty-Methode 461
PERT 476
PERT-Methode 482
Phase II 339
Pivotelement 254, 335
Pivotspalte 254
Pivotzeile 254
Polyeder, konvexes 325
Polynom 20, 31
Polypol 110
Polytop, konvexes 325
Portfolio-Problem 457, 468
positiv definit 452
positiv semi-definit 452
Potenzfunktion 17
Potenzreihe 150
Preis-Absatz-Funktion 25, 30
Preisangabenverordnung (PAngV) 389
Preiselastizität des Absatzes 84
Preiszone 116
primales Problem (P) 348
Problem, duales 348
–, primales 348
Produktionselastizität 84
Produktionsfunktion 29 f.
Produktionsplanung 321

- Produktionstheorie, neoklassische 30
 Produktmatrix 241
 Produktregel 50
 Programm, lineares 331
 –, nichtlineares 446
 Prohibitivpreis 130, 135, 139
 Prozedur, ASSIGN 473
 –, CPM 479
 –, GANTT 480
 –, IML 484
 –, LP 464
 –, NETFLOW 475
 –, NLP 467
 –, Optmodel 485
 –, TRANS 472
 Prozentannuität 412
 Punkt, zulässiger 326
 Put 444
- Q**
 quadratisches Optimierungsproblem 469
 Quotientenkriterium für Potenzreihen 151
 – für Reihen 147
 Quotientenregel 51
- R**
 Randminimum 108
 Ratenkredit 421
 Ratentilgung 408, 410
 Reagibilität 79
 –, detaillierte Klassifizierung 85
 –, gewinnmaximierender Absatz 139
 –, Klassen 85
 –, Klassifizierung 80
 –, maximaler Gewinn 139
 –, Messgrößen 80
 Reagibilitätsgrad der Kosten 92
 Reagibilitätsvergleich 80
 Realteil 160
 Rechenzeile 254
 Rechteckregel zur numerischen Integration 219
 rechtsgekrümmt 24
 Regel von SARRUS 312
 Reihe, alternierende 146
 –, arithmetische 146
 –, divergente 146
 –, geometrische 146
 –, harmonische 146
 –, konvergente 145
 –, MACLAURINSche 153
 –, Potenz- 150
 –, TAYLOR 157
 –, unendliche 145
 Rendite 374, 442
 Renditerechnung 424
 Rente 392
 –, abgebrochene 398
 –, aufgeschobene 398
 –, ewige 399
 –, nachschüssige 392
 –, unterbrochene 398
 –, vorschüssige 392, 396
 Rentenbarwert 393, 397
 Rentenbarwertfaktor, nachschüssiger 394
 Rentenendwert 393, 397
 Rentenendwertfaktor, nachschüssiger 394
 Rentenrechnung 392
 Ressource 357
 Restglied 158
 Restriktion, eigentliche 322
 Restschuld 408
 Restwert 435
 Richtungsableitung 173
 Risiko 442
 Risiko-Rendite-Diagramm 443
- S**
 SAS 447, 463
 SAS/GRAPH 463
 SAS/OR 463
 SAS-Programm 464
 SAT 478
 Sättigungsprozess 32
 Sättigungswert 21
 Schattenpreis 356
 Scheinvorgang 476
 Schlupfvariable 332
 schwacher Dualitätssatz 350
 Sekantenverfahren 428
 Sensitivitätsanalyse 362
 SET 478
 Simplex-Algorithmus 320
 –, dualer 351, 353
 –, Grundlage 446
 –, Phase 0 348
 –, Phase I 346
 –, Phase II 339 f., 346
 –, Phase III 353
 Simplex-Kurztableau, Rechenregeln 338

- Simplex-Tableau 335
- , Kurzform 336
- , Langform 335
- SIMPSON-Regel zur numerischen Integration 220
- Skalarprodukt 240
- Sollzinssatz 409
- Spaltenindex 232
- Spaltenvektor 232
- Sparquote 78
- Sparziel 394
- Spatprodukt 312
- Stammfunktion 195
- Standard-Maximum-Problem 332
- starker Dualitätssatz 350
- steepest edge 342
- Steepest unit ascent 340
- Stetigkeit 44, 171
- , Wesen 46
- streng konkav 64, 452
- streng konvex 64, 452
- streng monoton fallend 61
- streng monoton wachsend 61
- Ströme 230
- Stromgröße 229
- Strukturvariablen 326, 332
- Stückkosten 99
- Stücknotiz 425
- Stufenproduktion 229, 307
- mit Verzweigungen 270
- Summenregel 50
- Systemmatrix 276
- , erweiterte 276
- T**
- Tangentenregel zur numerischen Integration 220
- Tangentialebene 179
- TAYLOR
- , Polynom 157
- , Reihe 157
- , Satz von 157
- Tilgung 408
- Tilgungsplan 408 f., 418
- Tilgungsrate 408
- Tilgungsrechnung 408
- Tilgungssatz, anfänglicher 412
- totales Differenzial 180
- Transport 230
- Transportproblem 323, 359, 471
- Trapezform 281
- Trapezregel zur numerischen Integration 220
- TURGOT-Funktion 73
- Typ einer Matrix 232
- U**
- überproportional 81, 85
- Überproportionalität 89
- , abnehmende 86
- , zunehmende 86
- Umformung, elementare 253
- Umkehrfunktion 26
- Umsatzrentabilität 91
- unelastisch 85
- unendliche Reihe 145
- Ungleichung 323
- unterproportional 81, 85
- Unterproportionalität 89
- , abnehmende 86
- , zunehmende 86
- Urbildpunkt 14
- V**
- Variable, abhängige 14
- , unabhängige 14
- Vektor der Marktanteile 264
- , Komponenten 232
- , linear abhängig 258
- , linear unabhängig 258
- , Linearkombination 238
- , Linearkombination, konvexe 238
- , Norm (Länge) 245
- , summierender 234
- Vektorprodukt 312
- Vektorraum 259
- Vergleichskriterium für Reihen 146
- Verkaufsoption 444
- Verkettung 20
- Verzinsung, antizipative 375
- , dekursive 375
- , einfache 369
- , exponentielle 372
- , gemischte 377
- , jährliche 372
- , nachschüssige 375
- , stetige 380
- , unterjährige 378, 405
- , vorschüssige 375
- Verzweigung 270
- volkswirtschaftliche Verflechtung 230, 266
- Volumen eines Rotationskörpers 214
- eines zylindrischen Körpers 221
- Vorgang 476

W

Wachstum, exponentielles 31
–, gebremstes 32
–, lineares 31
Wachstumsfunktion, logistische 21, 33
Wachstumskonstante, natürliche 19
Wachstumsrate 31
Wanderungsmatrix 264
Wanderungszahl 263
Wartezeit 398
Wendepunkt 64
Wertebereich 14, 169
Wertepaar 14
Wertzuwachs p. a. 387
Winkelfunktion 19
Wirkungsgröße 29
Wurzelfunktion 17
Wurzelkriterium für Potenzreihen 151
– für Reihen 147

Z

Zahlen, komplexe 160
Zahlenfolge 38
Zahlungstermin, mittlerer 390
Zeilenindex 232

Zeilenvektor 232
Zeitrente 392
Zielfunktion 322
Zielgröße 29
Zins 369
–, effektiver 386
Zinsbindung 419
Zinsdivisor 372
Zinseszinsen 369, 372
Zinsfuß 369
Zinskapitalisierungszeitpunkt 369
Zinssatz 369
–, interner 384
Zinsschuld 425
Zinstage 370
Zinsteiler 372
Zinszahl 372
zulässiger Punkt 326
Zuordnungsproblem 473
Zuordnungsvorschrift 14
Zuschreibungsabschreibung 439
Zuwachs 23, 47
– der Funktionswerte 47
Zwischenwertsatz 46