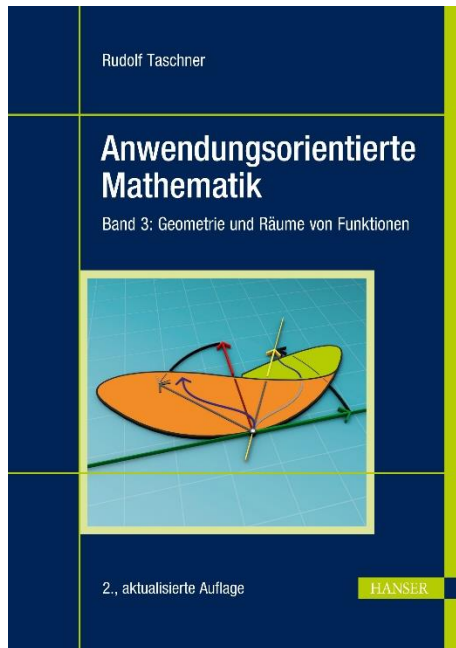


HANSER



Leseprobe

zu

Anwendungsorientierte Mathematik 3

von Rudolf Taschner

Print-ISBN: 978-3-446-47193-1

E-Book-ISBN: 978-3-446-47202-0

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471931>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

Der dritte Band meines Lehrbuchs über Anwendungsorientierte Mathematik besteht aus zwei großen Teilen, die jeweils drei Kapitel umfassen. Der erste Teil thematisiert die Geometrie. Das Einleitungskapitel stellt die grundlegenden Rechenmethoden vor, die man gerne unter dem Namen „Vektoranalysis“ zusammenfasst. Es ist von zentraler Bedeutung für alle, die Mathematik in der Physik und im Ingenieurwesen anwenden wollen. Die beiden folgenden Kapitel über Differentialgeometrie und krummlinige Koordinaten bauen darauf auf. Sie richten sich vornehmlich an jene Leserinnen und Leser, die sich für das Vermessungswesen, für die abstrakte Mechanik oder Elektrodynamik, oder aber für die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins interessieren. Der zweite Teil des Buches ist jenen Stoffgebieten gewidmet, die man unter dem Sammelbegriff „Höhere Analysis“ subsumiert. Der Bogen spannt sich dabei vom Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen bis hin zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die im Zuge der Betrachtung linearer Funktionenräume im fünften Kapitel einen angemessenen Platz findet.

Die Ziele des Lehrbuchs werden in diesem Band konsequent weiter verfolgt: Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind.

Wie bei den beiden ersten Bänden des Buches ist auch hier die Anordnung des Lehrstoffs zuweilen ungewohnt. Es kommt den an Anwendungen der Mathematik Interessierten entgegen, wenn sie schon einige Verfahren, wie zum Beispiel die Berechnung von Fourierreihen, die Integraltransformationen, deren Brauchbarkeit beim Lösen partieller Differentialgleichungen und anderes mehr kennenlernen, bevor sie – wie es hier im sechsten und abschließenden Kapitel skizziert wird – mit der dahinter liegenden abstrakten Theorie konfrontiert werden. Neben vielen anderen ausgezeichneten Klassikern der Lehrbuchliteratur habe ich mich vor allem an dem brillant verfassten Buch von Harley Flanders „Differential Forms with Applications to the Physical Sciences“ und an dem beeindruckenden Buch von Robert D. Richtmyer „Principles of Advanced Mathematical Physics“ orientiert. Die wohl besten Zugänge zu den Themen konnte ich einst von Edmund Hlawka, von Johann Cigler und, was die Wahrscheinlichkeitstheorie betrifft, von Karl Sigmund in deren einzigartigen Vorlesungen an der Universität Wien erfahren. In diesem Buch versuche ich, so gut ich kann, dieses wertvolle Erbe zu vermitteln. Ein weiterer Leitstern für mich ist, wie bereits im Vorwort des ersten Bandes erwähnt, die souveräne Aufbereitung des Stoffes, die Bernard Friedman in seinen „Lectures on Applications-Oriented Mathematics“ gelang.

Auch Kenner der Materie werden an der einen oder anderen Stelle Ungewohntes finden: Den originellen Differentialrechnungsvorlesungen Ciglers verdanke ich eine raffinierte Herleitung

der sogenannten Transformationsformel mehrdimensionaler Integrale; der Satz von Stokes umgeht elegant die sonst von Vortragenden gefürchtete Umständlichkeit bei der Beweisführung. Dass man vollständige Räume quadratisch integrierbarer Funktionen mit verallgemeinerten Funktionen konkret und einsichtig beschreiben kann, hat Richtmyer hervorgehoben. Somit zeigt sich, dass die von Riemann entworfene, den Prinzipien des Konstruktivismus gehorchende Integrationstheorie auch bei der Betrachtung von Hilberträumen vollständig ausreicht. Und die abstrakte Darstellung von Atlanten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten gelingt wohl dann am besten, wenn man vorher konkrete Kartenentwürfe des Globus studiert. Die Veranschaulichung durch ansprechende Abbildungen ist hier von hohem Nutzen. Ich bin meinem Kollegen Hans Havlicek, Grandseigneur der Darstellenden Geometrie an der Technischen Universität Wien, sehr dankbar, dass er mir dafür einige seiner ausgefeilten Kartenentwürfe freigiebigst zur Verfügung gestellt hat.

Auch dieser Band wurde vom Carl Hanser Verlag unter professioneller Betreuung von Christine Fritsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegeben. Ihnen sei noch einmal herzlichst Dank gesagt. Und auch bei diesem Band bitte ich, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler zu verzeihen. Im Vorwort seines wunderbaren Buches „The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics“ schrieb George W. Mackey: „If the reader thinks a sign should be changed he is probably right. Perhaps there are more serious errors here and there.“ Die gleichen Worte möchte ich den Leserinnen und Lesern dieses Buches mit auf dem Weg geben.

Mein innigstes „Magnas gratias vobis ago“ möchte ich schließlich meiner Frau Bianca und meinen Kindern Laura und Alexander aussprechen: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, September 2014

Rudolf Taschner

Inhalt

Vorwort	5
1 Kalkül mit Differentialformen	11
1.1 Zellen und Ketten	11
1.2 Differentialformen und Keilprodukt	16
1.3 Ränder	22
1.4 Differentiale	25
1.5 Unbestimmte Integrale von Differentialformen	28
1.6 Integrale über Ränder und von Differentialen	34
1.7 Gradient, Divergenz, Rotation	37
1.8 Maxwellgleichungen	42
1.9 Kurvenintegrale	46
1.10 Flächenintegrale	48
1.11 Raumintegrale	56
1.12 Eulersche Gammafunktion	61
1.13 Übungsaufgaben	65
2 Differentialgeometrie	74
2.1 Bewegliche Dreibeine	74
2.2 Raumkurven	77
2.3 Flächen im Raum	80
2.4 Hyperbolisches Paraboloid	83
2.5 Darboux'sches Dreibein und metrische Fundamentalmatrix	86
2.6 Drehflächen	88
2.7 Winkel, Länge, Flächeninhalt	94
2.8 Oberfläche, Volumen	97
2.9 Flächenkurven	101
2.10 Kinematik eines punktförmigen Körpers	105
2.11 Krümmungen einer Fläche	108
2.12 Parallelverschiebung eines Vektors	111
2.13 Übungsaufgaben	115

3	Krummlinige Koordinaten	120
3.1	Quadratische Plattkarten	120
3.2	Zylinderprojektionen	125
3.3	Gnomonische und stereographische Projektion	129
3.4	Karten einer Mannigfaltigkeit	134
3.5	Messen auf einer Mannigfaltigkeit	137
3.6	Ableitungskoeffizienten der Punkte	139
3.7	Inhaltselement einer Mannigfaltigkeit	142
3.8	Ableitungskoeffizienten der Vektoren	144
3.9	Krümmungen einer Mannigfaltigkeit	148
3.10	Übungsaufgaben	151
4	Integraltransformationen	160
4.1	Testfunktionen	160
4.2	Verallgemeinerte Funktionen	163
4.3	Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen	166
4.4	Diracs Deltafunktion	170
4.5	Differentiation verallgemeinerter Funktionen	173
4.6	Greensche Funktionen	178
4.7	Fouriers Integraltheorem	182
4.8	Zwei partielle Differentialgleichungen	187
4.9	Rechnen mit dem Differentialoperator	190
4.10	Anfangswertaufgaben	194
4.11	Fourierreihen	197
4.12	Partialbruchzerlegung des Cotangens	202
4.13	Übungsaufgaben	205
5	Funktionenräume	213
5.1	Lineare Räume	213
5.2	Zufallsvariablen	215
5.3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	221
5.4	Inneres Produkt	227
5.5	Projektion eines Vektors	231
5.6	Erwartungswert und Varianz	234
5.7	Binomialverteilung	237
5.8	Poissonverteilung	239
5.9	Normalverteilung	242
5.10	Gesetz der großen Zahlen	245

5.11	Lineare Operatoren.....	247
5.12	Spektraldarstellung von Operatoren	251
5.13	Quantentheorie	253
5.14	Übungsaufgaben	256
6	Vollständige Räume	261
6.1	Dirichletsche Kernfunktionen	261
6.2	Fejérsche Kernfunktionen	263
6.3	Approximationssätze von Fejér und Weierstraß.....	267
6.4	Verschiedene Normen, unterschiedliche Konvergenz	270
6.5	Quadratisch summierbare Folgen.....	273
6.6	Hilberträume	276
6.7	Hermitepolynome	279
6.8	Quadratisch integrierbare Funktionen	282
6.9	Fouriertransformation	285
6.10	Übungsaufgaben	288
	Index	293

1

Kalkül mit Differentialformen

■ 1.1 Zellen und Ketten

„Kalkül“ stammt von dem lateinischen *calculus*, das „Steinchen“ bedeutet, weil die Römer mit kleinen Steinen ihre einfachen Rechnungen durchführten. „Kalkül“ bedeutet „Rechenmethode“. Dieses Kapitel stellt den Kalkül mit „Differentialformen“ vor, grob gesprochen: den Kalkül mit formalen Ausdrücken, in denen Differentiale aufscheinen. Es ist ein Kalkül, dessen Fundamente Leibniz und Newton gelegt hatten, weshalb die Differentialrechnung im Englischen „*calculus*“ heißt. Der Kalkül mit Differentialformen wurde bis hin zum Beginn des 20. Jahrhunderts von den maßgebenden Mathematikern ihrer Zeit, vor allem aber von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren zum Zwecke seiner vielfältigen Anwendungen so weit ausgebaut, wie es im Folgenden beschrieben wird. Ansätze dieses Kalküls haben wir bereits im Kapitel über Differentialrechnung im Komplexen kennengelernt.

Im Zuge der Vorbereitung zum Beweis des Integralsatzes von Cauchy sind wir den Begriffen der „Zelle“ und der „Kette“ in der komplexen Ebene begegnet: Eine eindimensionale Zelle Σ war damals eine achsenparallele Strecke, die zwei komplexe Größen verbindet, wobei diese entweder gleiche Imaginärteile oder gleiche Realteile besitzen. Und eine Kette Λ war damals die Summe $c_1 \Sigma_1 + \dots + c_n \Sigma_n$ derartiger Zellen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, die mit ganzzahligen Vielfachheiten $c_1, \dots, c_n$ multipliziert sind. Dasselbe wollen wir nun für den dreidimensionalen Raum wiederholen:

In diesem Raum befindet sich ein Koordinatensystem mit drei Achsen, die in Richtung von Vektoren weisen, die linear unabhängig sind. Am einfachsten ist es, sich die drei Richtungsvektoren der Achsen als Einheitsvektoren vorzustellen, die zueinander paarweise orthogonal sind. Dann spannen die nach vorne laufende x -Achse und die nach rechts laufende y -Achse die Grundrissebene auf. Die y -Achse und die nach oben laufende z -Achse spannen die Aufrissebene auf, und die z -Achse spannt zusammen mit der x -Achse die Kreuzrissebene auf. In diesem Raum bezeichnen $P = (p, q, r)$ und $Q = (p + a, q + b, r + c)$ zwei Punkte. Vorausgesetzt wird dabei, von allen drei reellen Größen a, b, c stehe fest, ob sie entweder mit Null übereinstimmen, oder aber ob sie größer als Null sind. Jedenfalls befindet sich der Punkt Q , falls er nicht mit P zusammenfällt, entweder in Richtung der x -Achse *vor* P oder in Richtung der y -Achse *rechts von* P oder in Richtung der z -Achse *oberhalb von* P . (Dabei schließt das Wort „oder“ nichts aus: der Punkt Q kann gleichzeitig vor P , rechts von P und auch oberhalb von P geortet sein.) Für zwei derartige Punkte bezeichnet $\Sigma = [P; Q]$ eine *Zelle*. Sie besteht aus der Gesamtheit aller Punkte $X = (x, y, z)$ mit $p \leq x \leq p + a$, $q \leq y \leq q + b$, $r \leq z \leq r + c$. Genauer unterscheiden wir vier Typen von Zellen:

Erstens betrachten wir den Fall $a = b = c = 0$. Bei ihm stimmt Q mit P überein, und von der Zelle $\Sigma = [P; Q]$ bleibt nur der Punkt P selbst übrig. In diesem Fall nennen wir Σ eine *nulldimensionale Zelle*.

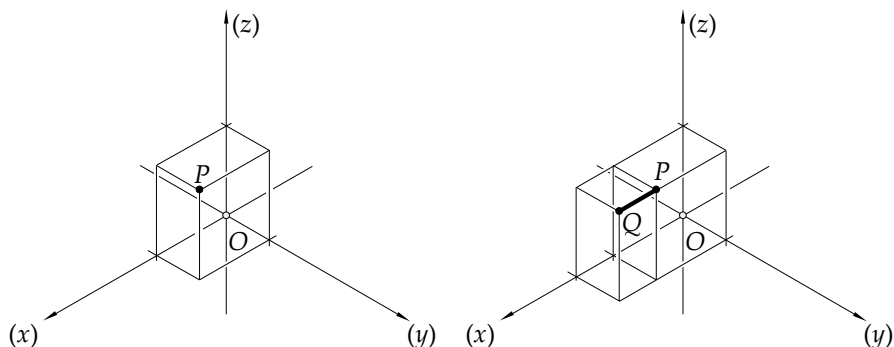


Bild 1.1 Links eine nulldimensionale Zelle, rechts eine eindimensionale, zur x -Achse parallele Zelle

Zweitens betrachten wir die drei Fälle $a > 0, b = c = 0$ oder $b > 0, c = a = 0$ oder $c > 0, a = b = 0$. Im ersten Fall ist die Zelle $\Sigma = [P; Q]$ eine zur nach vorne laufenden x -Achse achsenparallele Strecke, im zweiten Fall ist sie eine zur nach rechts laufenden y -Achse achsenparallele Strecke, und im dritten Fall ist sie eine zur nach oben laufenden z -Achse achsenparallele Strecke. In allen drei Fällen nennen wir Σ eine *eindimensionale Zelle*.

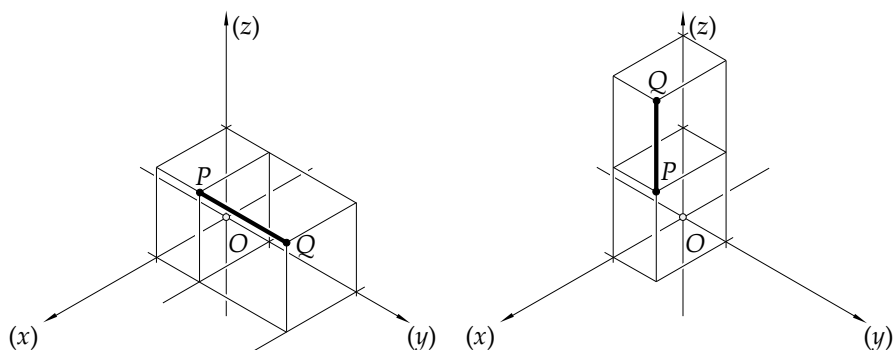


Bild 1.2 Links eine eindimensionale, zur y -Achse parallele Zelle, rechts eine eindimensionale, zur z -Achse parallele Zelle

Drittens betrachten wir die drei Fälle $a = 0, b > 0, c > 0$ oder $b = 0, c > 0, a > 0$ oder $c = 0, a > 0, b > 0$. Im ersten Fall ist die Zelle $\Sigma = [P; Q]$ ein Rechteck mit Seiten, die zur y -Achse und zur z -Achse parallel sind, im zweiten Fall ist sie ein Rechteck mit Seiten, die zur z -Achse und zur x -Achse parallel sind, und im dritten Fall liegt ein Rechteck mit Seiten vor, die zur x -Achse und zur y -Achse parallel sind. In allen drei Fällen nennen wir Σ eine *zweidimensionale Zelle*.

Viertens betrachten wir den Fall $a > 0, b > 0, c > 0$. Bei ihm ist die Zelle $\Sigma = [P; Q]$ ein Quader, dessen Kanten zu den drei Achsen parallel sind. Dementsprechend heißt in diesem Fall Σ eine *dreidimensionale Zelle*.

Liegen endlich viele Zellen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ von der gleichen Dimension vor und bezeichnen $c_1, \dots, c_n$ ebenso viele ganze Zahlen, heißt die daraus gebildete formale Summe $\Lambda = c_1 \Sigma_1 + \dots + c_n \Sigma_n$ eine *Kette*, genauer: eine *null-, ein-, zwei- oder dreidimensionale Kette*, je nachdem welche Dimension die Zellen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ haben. Die Zahlen $c_1, \dots, c_n$, die *Vielfachheiten*, mit denen die

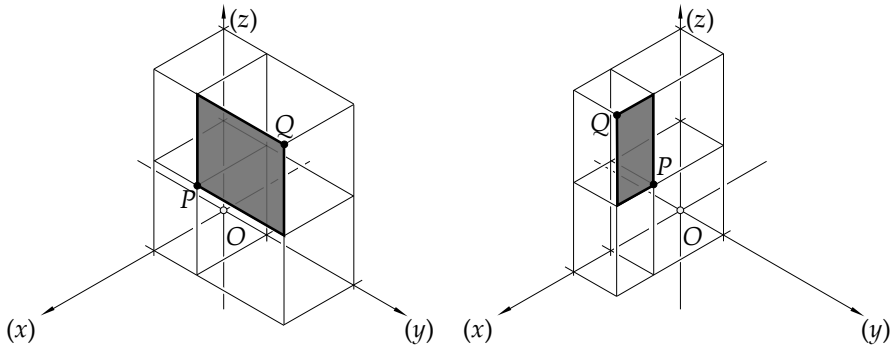


Bild 1.3 Links eine zweidimensionale, zur y - und zur z -Achse parallele Zelle, rechts eine zweidimensionale, zur z - und zur x -Achse parallele Zelle

Zellen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ in der Kette Λ vorkommen, teilen gleichsam mit, wie oft die jeweilige Zelle in der Kette „durchlaufen“ wird. Die Tatsache, dass die Vielfachheiten sowohl positive wie auch negative ganze Zahlen sein dürfen, weist darauf hin, dass man dem „Durchlaufen“ der Zellen eine bestimmte „Orientierung“ oder einen bestimmten „Durchlaufungssinn“ zuschreibt. Wir wollen dies im Einzelnen erörtern:

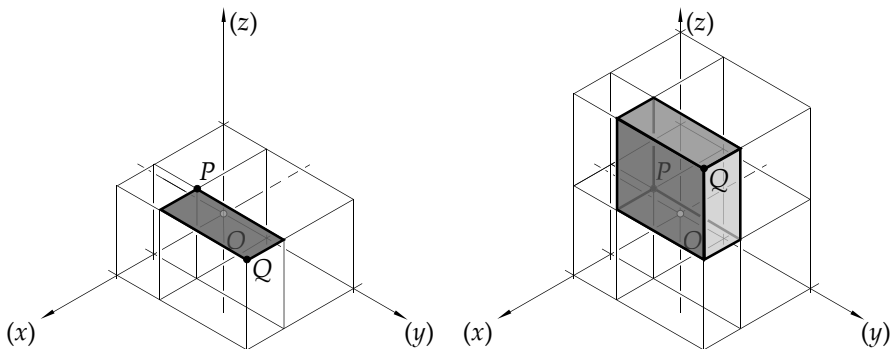


Bild 1.4 Links eine zweidimensionale, zur x - und zur y -Achse parallele Zelle, rechts eine dreidimensionale Zelle

Handelt es sich bei Σ um eine nulldimensionale Zelle, also um einen Punkt, bedeutet $c\Sigma$, dass dieser Punkt gleichsam c -mal genannt wird. Wenn c negativ sein sollte, stellt man sich am besten vor, dass an der Stelle, wo sich der Punkt befindet, ein Loch ist. Im gleichen Sinn, wie es in der Elementarteilchenphysik punktförmige Teilchen und Antiteilchen gibt, betrachten wir bei den nulldimensionalen Zellen „Punkte“ und „Antipunkte“ oder, anders gesprochen, „Punkte“ und „Löcher“. Es ist bezeichnend, dass der geniale theoretische Physiker Paul Dirac, der die Existenz von Antiteilchen theoretisch vorhergesagt hatte, ebenso von „Löchern“ sprach, wenn er das „Antielektron“, das später Positron getaufte Antiteilchen, als entgegengesetzt zum Elektron gezähltes punktförmiges Teilchen betrachtete.

Handelt es sich bei Σ um eine eindimensionale Zelle, also um eine achsenparallele Strecke $[P; Q]$, bedeutet $c\Sigma$, dass diese Strecke $|c|$ -mal durchlaufen wird. Ist c positiv, denken wir uns die Strecke $[P; Q]$ in Richtung von P nach Q durchlaufen, ist hingegen c negativ, denken wir

uns diese Strecke in Richtung von Q nach P durchlaufen. Und zwar so oft, wie der Betrag von c angibt.

Ein Beispiel dafür ist der folgende „räumliche Mäander“ (das Wort Mäander stammt vom in der Antike Maíandros genannten Fluss, der sich schleifenförmig durch die Landschaft zieht): Aus den acht Punkten $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (2, 1, 0)$, $D = (2, 1, 2)$, $E = (-2, 1, 2)$, $F = (-2, 1, 0)$, $G = (-1, 1, 0)$ und $H = (-1, 0, 0)$ bilden wir die Kette

$$\Lambda = [A; B] + [B; C] + [C; D] - [E; D] - [F; E] + [F; G] - [H; G] .$$

Wie man schnell erkennt, sind die Vielfachheiten so festgelegt, dass der räumliche Mäander vom Punkt A über die Punkte B, C, D, E, F, G bis zum Punkt H einmal durchlaufen wird.

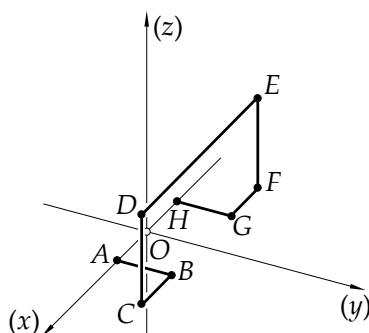


Bild 1.5 Der räumliche Mäander

Handelt es sich bei Σ um eine zweidimensionale Zelle, also um ein achsenparalleles Rechteck, verleihen wir $c\Sigma$ folgendermaßen einen „Durchlaufungssinn“: Ist c positiv, denken wir uns die Seiten des Rechtecks so oft *gegen den Uhrzeigersinn* durchlaufen, wie der Betrag von c angibt. Und ist c negativ, denken wir uns ebenfalls die Seiten des Rechtecks so oft durchlaufen, wie der Betrag von c angibt, diesmal aber *im Uhrzeigersinn*.

Ein Beispiel dafür ist die folgende „geöffnete Schachtel“: Sie besitzt die acht Punkte $A = (-1, -1, 0)$, $B = (1, -1, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (-1, 1, 0)$, $E = (-1, -1, 1)$, $F = (1, -1, 1)$, $G = (1, 1, 1)$ und $H = (-1, 1, 1)$ als Ecken. Aus einer Auswahl von ihnen bilden wir die Kette

$$\Lambda = [B; G] - [A; H] + [D; G] - [A; F] - [A; C] .$$

Die Vielfachheiten in dieser Kette haben wir (willkürlich) so festgelegt, dass das vorne und das rechts befindliche Seitenrechteck der Schachtel einen positiven Durchlaufungssinn zugesprochen erhalten, das hinten und das links befindliche Seitenrechteck der Schachtel sowie die unten befindliche Grundfläche der Schachtel einen negativen Durchlaufungssinn zugesprochen erhalten.

Handelt es sich bei Σ um eine dreidimensionale Zelle, also um einen achsenparallelen Quader $[P; Q]$, bedeutet $c\Sigma$, dass dieser Quader $|c|$ -mal in Erscheinung tritt. Auch hier sprechen wir von einem „Durchlaufen“ des Quaders und unterscheiden je nach Vorzeichen, wie diese „Orientierung“ des Quaders gemeint ist: Ist c positiv, wird der Quader so durchlaufen, dass seine vordere, seine rechte und seine obere Seitenfläche gegen den Uhrzeigersinn, hingegen seine hintere, seine linke und seine untere Seitenfläche im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Bei einem negativen c ist die Durchlaufungsrichtung der Seitenflächen jeweils umgekehrt.

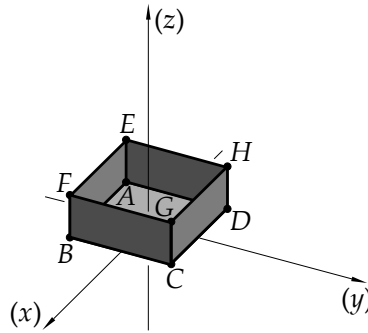


Bild 1.6 Die geöffnete Schachtel

Ein Beispiel dafür ist der folgende „durchbohrte Quader“: Er besitzt die 16 Punkte $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 3, 0)$, $D = (0, 3, 0)$, $E = (0, 0, 3)$, $F = (1, 0, 3)$, $G = (1, 3, 3)$, $H = (0, 3, 3)$ und $P = (0, 1, 1)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (1, 2, 1)$, $S = (0, 2, 1)$, $T = (0, 1, 2)$, $U = (1, 1, 2)$, $V = (1, 2, 2)$, $W = (0, 2, 2)$ als Ecken: Die acht zuerst genannten als äußere Ecken und die acht zuletzt genannten als innere Ecken, die sein dreidimensionales „Loch“ begrenzen. Den durchbohrten Quader selbst erhalten wir als Kette

$$\Lambda = [A; G] - [P; V] .$$

Vom Quader $[A; G]$ wird der Quader $[P; V]$ gleichsam weggenommen, daher die Wahl der Vorzeichen.

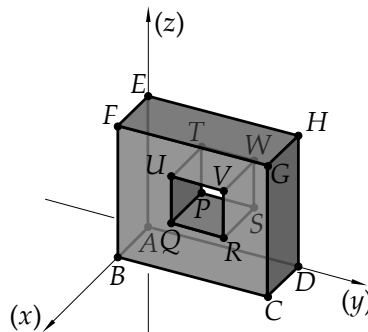


Bild 1.7 Der durchbohrte Quader

Liegt mit $\Lambda = c_1 \Sigma_1 + \dots + c_n \Sigma_n$ eine Kette, egal welcher Dimension vor und bezeichnet c eine ganze Zahl, kann man aus Λ die Kette $c\Lambda$ bilden, indem man einfach

$$c\Lambda = cc_1 \Sigma_1 + \dots + cc_n \Sigma_n$$

setzt. Und liegen mit $\Lambda' = a_1 \Sigma'_1 + \dots + a_m \Sigma'_m$ und mit $\Lambda'' = b_1 \Sigma''_1 + \dots + b_k \Sigma''_k$ zwei Ketten der gleichen Dimension vor, kann man ihnen eine Summe $\Lambda' + \Lambda''$ durch die Festlegung

$$\Lambda' + \Lambda'' = a_1 \Sigma'_1 + \dots + a_m \Sigma'_m + b_1 \Sigma''_1 + \dots + b_k \Sigma''_k$$

zuordnen. Beides ist sehr einfach und ohne Weiteres verständlich. Eine kleine Unsicherheit verbleibt allerdings, denn es kann vorkommen, dass zwei Ketten in verschiedenen Darstellungen vorliegen, obwohl es sich anschaulich um das gleiche Punktgefüge handelt. So wird der oben beschriebene räumliche Mäander nicht nur als

$$\Lambda = [A; B] + [B; C] + [C; D] - [E; D] - [F; E] + [F; G] - [H; G],$$

sondern auch als

$$\Lambda^* = [A; B] + [F; C] + [C; D] - [E; D] - [F; E] - [G; B] - [H; G]$$

beschrieben. Warum betrachten wir Λ und Λ^* als „gleiche“ Ketten? Um diese Frage allgemein beantworten und hierin Klarheit schaffen zu können, führen wir den Begriff der *Spur* einer Kette ein:

Wenn genau einer der in $\Lambda = c_1 \Sigma_1 + c_2 \Sigma_2 + \dots + c_n \Sigma_n$ genannten Summanden, zum Beispiel $c_k \Sigma_k$, die Punkte einer Zelle Σ von der gleichen Dimension wie Λ mit der von Null verschiedenen Vielfachheit c_k erfasst, sagt man, dass die Punkte der Zelle Σ auf der *Spur* der Kette Λ zu liegen kommen. Wenn mehrere dieser Summanden, zum Beispiel die beiden Summanden $c_k \Sigma_k$ und $c_l \Sigma_l$ die Punkte der Zelle Σ erfassen, sollen diese Punkte nur dann zur *Spur* der Kette Λ zählen, wenn die entsprechende Summe der Vielfachheiten, im Beispiel der zwei Zellen Σ_k , Σ_l die Summe $c_k + c_l$, von Null verschieden ist. Im oben genannten Beispiel des räumlichen Mäanders gehören genau die in den Zellen $[A; B]$, $[B; C]$, $[C; D]$, $[E; D]$, $[F; E]$, $[F; G]$, $[H; G]$ vorkommenden Punkte der Spur des Mäanders an. In der Darstellung Λ^* des Mäanders kommt zwar die Zelle $[F; C]$ vor, aber nicht alle Punkte dieser Zelle gehören der Spur des Mäanders an, denn der Summand $-[G; B]$ sorgt dafür, dass die zwischen G und B befindlichen Punkte auf $[F; C]$ nicht zur Spur des Mäanders gehören. Im gleichen Sinn befinden sich die Punkte aus dem Inneren des Quaders $[P; V]$ nicht in der Spur des durchbohrten Quaders $\Lambda = [A; G] - [P; V]$, wohl aber alle anderen Punkte des Quaders $[A; G]$. Dementsprechend nennen wir zwei Ketten *gleich*, wenn sie die gleiche Spur besitzen und die Zellen dieser Spur im gleichen Durchlaufungssinn mit der gleichen Vielfachheit gezählt werden.

■ 1.2 Differentialformen und Keilprodukt

Ziel der folgenden Erörterungen ist, die im vorigen Abschnitt vorgestellten Zellen und Ketten als Integrationsbereiche von mehrdimensionalen Integralen zu nützen. Zu diesem Zweck müssen neben den Integrationsbereichen die Integranden vorgestellt werden. Diese sind sogenannte „Differentialformen“. Um sie präzise erfassen zu können, setzen wir voraus, es liege im x - y - z -Raum ein Gebiet vor, und jede im Folgenden betrachtete Variable w ist durch eine Funktion f als $w = f(x, y, z)$ definiert, wobei die Funktion f in diesem Gebiet definiert und so oft stetig differenzierbar ist, wie wir es im jeweiligen Zusammenhang benötigen. Ebenso setzen wir von allen Ketten, die wir im Folgenden betrachten werden, voraus, dass deren Spuren in diesem Gebiete liegen.

Ähnlich, wie es Zellen und Ketten verschiedener Dimensionen gibt, unterscheiden wir bei Differentialformen verschiedene „Stufen“:

Eine *Differentialform nullter Stufe* ist eine von den Koordinaten x, y, z abhängige Variable $\omega = w = w(x, y, z)$. Wenn Σ eine nulldimensionale Zelle, also einen Punkt $P = (p, q, r)$ bezeichnet, kann man den Wert, den die Variable w an der Stelle P annimmt, berechnen. Wir haben dafür die Bezeichnung $w|_{x=p, y=q, z=r}$ kennengelernt. Nun führen wir als weitere, vorerst pompös wirkende Bezeichnung die mit einem Integral ein: wir schreiben für diesen Wert

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} w = w|_{x=p, y=q, z=r}.$$

Bald wird sich zeigen, dass sich diese Schreibweise bewährt.

Eine *Differentialform erster Stufe* ist ein Ausdruck der Gestalt $\omega = udx + vdy + wdz$, wobei u, v und w drei von den Koordinaten x, y, z abhängige Variablen bezeichnen: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Wenn $\Sigma = [P; Q]$ bei $P = (p, q, r)$ und $Q = (p+a, q+b, r+c)$ eine eindimensionale Zelle bezeichnet, unterscheiden wir für die Erklärung des Integrals von ω über die Zelle Σ drei Fälle. Im ersten Fall ist $a > 0$, und $b = c = 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur x -Achse und die beiden anderen Variablen bleiben konstant: $y = q, z = r$. Da deren Differentiale verschwinden, lautet in diesem Fall

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} udx + vdy + wdz = \int_p^{p+a} u|_{y=q, z=r} dx.$$

Im zweiten Fall ist $b > 0$, und $c = a = 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur y -Achse und die beiden anderen Variablen bleiben konstant: $z = r, x = p$. Da deren Differentiale verschwinden, lautet in diesem Fall

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} udx + vdy + wdz = \int_q^{q+b} v|_{x=p, z=r} dy.$$

Im dritten Fall ist $c > 0$, und $a = b = 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur z -Achse und die beiden anderen Variablen bleiben konstant: $x = p, y = q$. Da deren Differentiale verschwinden, lautet in diesem Fall

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} udx + vdy + wdz = \int_r^{r+c} w|_{x=p, y=q} dz.$$

Eine *Differentialform zweiter Stufe* ist ein Ausdruck der Gestalt $\omega = udydz + vdzdx + wdx dy$, wobei u, v und w drei von den Koordinaten x, y, z abhängige Variablen bezeichnen: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Die nach den Variablen auftretenden Symbole $dydz$, $dzdx$ und $dx dy$ sehen wie Produkte von Differentialen aus. Solche Produkte sind bisher noch nie vorgekommen. Newton und Leibniz hätten mit ihnen auch gar nichts anzufangen gewusst, denn für sie waren Differentiale so kleine Größen, dass man deren Produkte gleich Null setzen kann. Doch daran wollen wir gar nicht mehr erinnert werden. Besser ist es, sich auf die geometrische Deutung der Differentiale zu berufen, die bereits von Leibniz geahnt wurde und allen Anwendern der Mathematik, die sich ein anschauliches Bild der Differentiale verschaffen wollen, in Fleisch und Blut übergegangen sein sollte: Im Punkt $X = (x, y, z)$ des betrachteten Gebietes wird eine zur x -Achse parallele dx -Achse, eine zur y -Achse parallele dy -Achse und eine zur z -Achse parallele dz -Achse gelegt. So gesehen ist eine Differentialform erster Stufe, also ein Ausdruck der Gestalt $udx + vdy + wdz$, ein Vektor, der anschaulich vom Punkt X ausgeht und in dem dx - dy - dz -Koordinatensystem die (an der Stelle X ausgewerteten) Größen u, v, w als Komponenten besitzt. Der lineare Raum dieser Differentialformen erster Stufe wird von den

Differentialen dx , dy , dz als Basis aufgespannt. Die Vektor- und Tensorrechnung beantwortet nun, wie man die Produkte $dydz$, $dzdx$ und $dx dy$ zu verstehen hat: Sie sind Bivektoren. Vorsichtige schreiben tatsächlich statt $dydz$, $dzdx$ und $dx dy$ diese Produkte so: $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ und $dx \wedge dy$. Aber weil uns bisher keine anderen Produkte von Differentialen begegneten als eben jetzt diese Keilprodukte, erlauben wir uns, *beim Keilprodukt von Differentialformen den Keil einfach wegzulassen*. Genauso wie man beim gewöhnlichen Produkt von mit Buchstaben symbolisierten Zahlen den Multiplikationspunkt einfach weglässt.

Die Rechenregeln des Keilprodukts darf man aber nicht vergessen! So ist zu beachten, dass

$$dx dx = dy dy = dz dz = 0$$

ist und dass

$$dz dy = -dy dz, \quad dx dz = -dz dx, \quad dy dx = -dx dy$$

gilt. Sind $\omega_1 = u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz$ und $\omega_2 = u_2 dx + v_2 dy + w_2 dz$ zwei Differentialformen erster Stufe, stellt $\omega = \omega_1 \omega_2$ deren Keilprodukt dar, das sich aufgrund der eben genannten Rechenregeln und unter Beachtung des distributiven Rechengesetzes so berechnet:

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= (u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz)(u_2 dx + v_2 dy + w_2 dz) = \\ &= (v_1 w_2 - w_1 v_2) dy dz + (w_1 u_2 - u_1 w_2) dz dx + (u_1 v_2 - v_1 u_2) dx dy. \end{aligned}$$

Hier trifft $\omega_2 \omega_1 = -\omega_1 \omega_2$ zu. Denn beide Differentialformen ω_1 und ω_2 sind von erster Stufe, 1 ist eine ungerade Zahl und das gradierte kommutative Rechengesetz ist zu beachten.

Ob man aber das Produkt einer Differentialform nullter Stufe, also einer Variable w , mit einer Differentialform ω welcher Stufe auch immer als gewöhnliches oder als Keilprodukt deutet, ist einerlei: Es ergibt in beiden Deutungen das Gleiche. Und weil 0 eine gerade Zahl ist, stimmt in diesem Fall wegen des gradierten kommutativen Rechengesetzes $w\omega = \omega w$, wie es sein soll.

Wenn $\Sigma = [P; Q]$ bei $P = (p, q, r)$ und $Q = (p + a, q + b, r + c)$ eine zweidimensionale Zelle bezeichnet, unterscheiden wir für die Erklärung des Integrals von $\omega = u dy dz + v dz dx + w dx dy$ über die Zelle Σ wieder drei Fälle. Im ersten Fall ist $a = 0$, und es sind $b > 0$, $c > 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur y - z -Ebene und die Variable x bleibt konstant: $x = p$. Da deren Differential verschwindet, also auch $dz dx = dz 0 = 0$ sowie $dx dy = 0 dy = 0$ gilt, lautet in diesem Fall

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} u dy dz + v dz dx + w dx dy = \int_r^{r+c} \int_q^{q+b} u|_{x=p} dy \cdot dz.$$

Es ist zu beachten, dass im letzten Schritt aus dem einen Integral über die zweidimensionale Zelle Σ das zuweilen „Doppelintegral“ genannte iterierte Integral geworden ist: Im Inneren des iterierten Integrals wird über die Variable y integriert, die Variable z spielt in ihm die Rolle eines Parameters. Und im Äußeren des iterierten Integrals wird über die Variable z integriert, die Variable y kommt dort gar nicht mehr vor. Genauso gehen wir in den beiden anderen Fällen vor: Im zweiten Fall ist $b = 0$, und es sind $c > 0$, $a > 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur x - z -Ebene und die Variable y bleibt konstant: $y = q$. Da deren Differential verschwindet, also auch $dy dz = 0 dz = 0$ sowie $dx dy = dx 0 = 0$ gilt, lautet in diesem Fall

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} u dy dz + v dz dx + w dx dy = \int_p^{p+a} \int_r^{r+c} v|_{y=q} dz \cdot dx.$$

Im dritten Fall ist $c = 0$, und es sind $a > 0$, $b > 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur x - y -Ebene und die Variable z bleibt konstant: $z = r$. Da deren Differential verschwindet, also auch $dydz = dy0 = 0$ sowie $dzdx = 0dx = 0$ gilt, lautet in diesem Fall

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} u dydz + v dzdx + w dxdy = \int_q^{q+b} \int_p^{p+a} w|_{z=r} dx \cdot dy.$$

Eine *Differentialform ω dritter Stufe* ist ein Ausdruck der Gestalt $\omega = w dxdydz$, wobei w eine von den Koordinaten x , y , z abhängige Variable bezeichnet: $w = w(x, y, z)$. Hier werden die drei Differentiale dx , dy , dz mit dem Keilprodukt zu $dxdydz$ verbunden und an die Variable w angehängt. Eigentlich sollte man statt $dxdydz$ genauer $dx \wedge dy \wedge dz$ schreiben. Aber wie schon zuvor vereinbaren wir auch hier, beim Keilprodukt von Differentialformen den Keil wegzulassen. Die Rechengesetze des Keilprodukts bleiben jedoch nach wie vor zu beachten, unter ihnen die Regel

$$dxdydz = dydzdx = dzdxdy = -dzdydx = -dydxdz = -dxdzdy$$

Wenn zum Beispiel $\omega_1 = u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz$ und $\omega_2 = u_2 dydz + v_2 dzdx + w_2 dxdy$ zwei Differentialformen bezeichnen, die eine erster und die andere zweiter Stufe, lautet aufgrund der Rechengesetze deren Keilprodukt

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= (u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz) (u_2 dydz + v_2 dzdx + w_2 dxdy) = \\ &= u_1 u_2 dxdydz + v_1 v_2 dydzdx + w_1 w_2 dzdxdy = (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) dxdydz. \end{aligned}$$

Hier stimmt $\omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1$, was wegen des gradierten kommutativen Gesetzes so sein muss, weil ω_2 von gerader Stufe ist. Ebenso ist klar, dass das Keilprodukt zweier Differentialformen zweiter Stufe Null ergibt, denn für eine Differentialform vierter Stufe, die als dieses Produkt aufscheinen sollte, ist im dreidimensionalen Raum kein Platz. Beim Keilprodukt einer Differentialform erster Stufe mit einer Differentialform dritter Stufe verhält es sich genauso.

Es liegt nun bereits nahe, wie $\omega = w dxdydz$ entlang einer dreidimensionalen Zelle $\Sigma = [P; Q]$ mit $P = (p, q, r)$, $Q = (p+a, q+b, r+c)$ und mit $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ zu integrieren ist: Wir definieren

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} w dxdydz = \int_r^{r+c} \int_q^{q+b} \int_p^{p+a} w dx \cdot dy \cdot dz.$$

Wir deuten folglich dieses Integral als ein dreifach iteriertes Integral.

Schließlich sollen $\Lambda = c_1 \Sigma_1 + c_2 \Sigma_2 + \dots + c_n \Sigma_n$ eine Kette und ω eine Differentialform bezeichnen, wobei die Stufe der Differentialform ω mit der Dimension der Kette Λ übereinstimmt. Das Integral der Differentialform über diese Kette ist naheliegender so festgelegt:

$$\int_{\Lambda} \omega = c_1 \int_{\Sigma_1} \omega + c_2 \int_{\Sigma_2} \omega + \dots + c_n \int_{\Sigma_n} \omega$$

Nun ist es an der Zeit, anhand von Beispielen zu belegen, wie das formale Rechnen mit den so definierten Begriffen vor sich geht:

Beginnen wir mit einer Differentialform nullter Stufe, zum Beispiel mit der von x , y , z abhängigen Variablen $\omega = 3x + yz$ und betrachten wir die nulldimensionale Kette $\Lambda = \Sigma_1 - 2\Sigma_2 + 3\Sigma_3 -$

$4\Sigma_4$, bei der Σ_1 für den Punkt $(1, 0, 0)$, Σ_2 für den Punkt $(-1, 2, 0)$, Σ_3 für den Punkt $(0, -2, 3)$ und Σ_4 für den Punkt $(0, 0, -3)$ stehen. Dann ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda} \omega &= (3x + yz)|_{x=1, y=0, z=0} - 2(3x + yz)|_{x=-1, y=2, z=0} + \\ &\quad + 3(3x + yz)|_{x=0, y=-2, z=3} - 4(3x + yz)|_{x=0, y=0, z=-3} = \\ &= 3 - 2 \times (-3) + 3 \times (-6) - 4 \times 0 = -9.\end{aligned}$$

Als Nächstes betrachten wir eine Differentialform erster Stufe, zum Beispiel $\omega = 4xy^2zdx + 2xydy + 6x^2z^2dz$ und integrieren diese über den im vorigen Abschnitt vorgestellten räumlichen Mäander Λ . Übernehmen wir für ihn die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts, bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda} \omega &= \int_{[A;B]} \omega + \int_{[B;C]} \omega + \int_{[C;D]} \omega - \int_{[E;D]} \omega - \int_{[F;E]} \omega + \int_{[F;G]} \omega - \int_{[H;G]} \omega = \\ &= \int_0^1 2xy|_{x=1, z=0} dy + \int_1^2 4xy^2z|_{y=1, z=0} dx + \int_0^2 6x^2z^2|_{x=2, y=1} dz - \\ &\quad - \int_{-2}^2 4xy^2z|_{y=1, z=2} dx - \int_0^2 6x^2z^2|_{x=-2, y=1} dz + \\ &\quad + \int_{-2}^{-1} 4xy^2z|_{y=1, z=0} dx - \int_0^1 2xy|_{x=-1, z=0} dy = \\ &= \int_0^1 2ydy + \int_1^2 0dx + \int_0^2 24z^2dz - \int_{-2}^2 8xdx - \int_0^2 24z^2dz + \int_{-2}^{-1} 0dx + \int_0^1 2ydy = 2.\end{aligned}$$

Als Nächstes betrachten wir eine Differentialform zweiter Stufe, zum Beispiel $\omega = 6xy^2z^3dydz + 8xy^3dzdx + 9x^2y^2dxdy$ und integrieren diese über die im vorigen Abschnitt vorgestellte geöffnete Schachtel Λ . Übernehmen wir für sie die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts, bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda} \omega &= \int_{[B;G]} \omega - \int_{[A;H]} \omega + \int_{[D;G]} \omega - \int_{[A;F]} \omega - \int_{[A;C]} \omega = \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 6xy^2z^3|_{x=1} dy \cdot dz - \int_0^1 \int_{-1}^1 6xy^2z^3|_{x=-1} dy \cdot dz + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_0^1 8xy^3|_{y=1} dz \cdot dx - \int_{-1}^1 \int_0^1 8xy^3|_{y=-1} dz \cdot dx - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 9x^2y^2|_{z=0} dx \cdot dy = \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 6y^2z^3 dy \cdot dz + \int_0^1 \int_{-1}^1 6y^2z^3 dy \cdot dz + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_0^1 8xdz \cdot dx + \int_{-1}^1 \int_0^1 8xdz \cdot dx - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 9x^2y^2 dx \cdot dy = \\ &= \int_0^1 4z^3 dz + \int_0^1 4z^3 dz + \int_{-1}^1 8xdx + \int_{-1}^1 8xdx - \int_{-1}^1 6y^2 dy = -2.\end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir eine Differentialform dritter Stufe, zum Beispiel $\omega = 30x^2y^4z dx dy dz$ und integrieren diese über den im vorigen Abschnitt vorgestellten durchbohrten Quader Λ . Übernehmen wir für ihn die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts, bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda} \omega &= \int_{[A;G]} \omega - \int_{[P;V]} \omega = \int_0^3 \int_0^3 \int_0^1 30x^2y^4z dx \cdot dy \cdot dz - \int_1^2 \int_1^2 \int_0^1 30x^2y^4z dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= \int_0^3 \int_0^3 10y^4z dy \cdot dz - \int_1^2 \int_1^2 10y^4z dy \cdot dz = \int_0^3 486z dz - \int_1^2 62z dz = 2094.\end{aligned}$$

Die Rechentechnik des Integrierens von Differentialformen über Zellen und Ketten ist somit erklärt. Offen bleibt die Frage, welche Bedeutung diese Integrale besitzen. Die Antwort darauf ist lang und beansprucht einen Großteil des restlichen Kapitels.

Die folgenden elementaren und zugleich sehr einfachen Beispiele für das Integral

$$\int_{\Sigma} \omega$$

geben einen ersten Einblick: Für die Differentialform nullter Stufe $\omega = 1$ und die nulldimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral die Zahl 1. Man kann dazu sagen, dass dieses Integral den von Σ symbolisierten Punkt einfach nur *zählt*: Er ist einmal vorhanden. Für die Differentialform erster Stufe $\omega = dx + dy + dz$ und die eindimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral die *Länge* der Zelle Σ . Für die Differentialform zweiter Stufe $\omega = dydz + dzdx + dxdy$ und die zweidimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral den *Flächeninhalt* der Zelle Σ . Und für die Differentialform dritter Stufe $\omega = dxdydz$ und die dreidimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral den *Rauminhalt* oder das *Volumen* der Zelle Σ .

Eine letzte wichtige Bemerkung soll diesen Abschnitt abrunden: Es ist zu beachten, dass den Regeln des Keilprodukts zufolge $dxdy = -dydx$ ist und daher bei einer zweidimensionalen, zur x - y -Ebene parallelen Zelle $\Sigma = [P; Q]$ mit $P = (p, q, r)$ und $Q = (p+a, q+b, r)$

$$\int_{\Sigma} u dx dy = - \int_{\Sigma} u dy dx$$

gilt. Hingegen wissen wir, dass bei iterierten Integralen die Reihenfolge der Integration keine Rolle spielt. Es gilt:

$$\int_q^{q+b} \int_p^{p+a} u dx \cdot dy = \int_p^{p+a} \int_q^{q+b} u dy \cdot dx.$$

Dies scheint wegen der beiden Formeln

$$\int_{\Sigma} u dx dy = \int_q^{q+b} \int_p^{p+a} u dx \cdot dy \quad \text{und} \quad \int_{\Sigma} u dy dx = - \int_p^{p+a} \int_q^{q+b} u dy \cdot dx$$

einen Widerspruch zu ergeben. Doch der vermeintliche Widerspruch löst sich dann in Wohlgefallen auf, wenn wir sorgfältig zwischen einem *Integral von Differentialformen*, also dem Integral der Gestalt

$$\int_{\Sigma} u dx dy$$

Index

A

Ableitungsgleichungen, 76, 140, 145
Ableitungskoeffizient, 76, 140, 145
Achse, 89
Additionsformel, 218
adjungierter Operator, 250
d'Aiguillon, François, 132
al-Chwarizmi, Muhammed, 160
Algorithmus, 160
Ampère, André-Marie, 42
ampèresches Gesetz, 42
Approximationsaufgabe, 231
Approximationssatz von Fejér, 267
Approximationssatz von Weierstraß, 269
äquidistante Azimutalprojektion, 152
Äquivalenzprinzip, 150
Asymptote, 97
Asymptotenrichtung, 118
Atlas, 134
Aufpunkt, 134
Azimut, 89
Azimutalgeschwindigkeit, 106
Azimutalprojektion, 129
Azimutalprojektion, äquidistante, 152
Azimutalprojektion, lambertsche, 152
Azimutalprojektion, orthographische, 151

B

Banach, Stefan, 290
Banachraum, 290
Basisvektor, 122, 134
Bayes, Thomas, 225
bayessche Formel, 225
bedingte Wahrscheinlichkeit, 223
begünstigendes Ereignis, 226
Beltrami, Eugenio, 119
benachteiligendes Ereignis, 226
Bernoulli, Jakob, 133, 237, 240, 247
Bernoulli, Nikolaus, 238
bernoullische Lemniskate, 115

Bernoulli-Versuchserie, 238
Bernoulliverteilung, 238
Bernstein, Sergej Natanowitsch, 226
bernsteinsches Paradoxon, 227
Bertrand, Joseph Louis François, 224
Berührungspunkt, 94, 139
Beschleunigungsvektor, 105
beschränkter Operator, 249
bewegliches Dreibein, 75
bewegliches n -Bein, 140
Bianchi, Luigi, 158
bianchische Identitäten, 158
Bienaymé, Irénée-Jules, 246
Binomialverteilung, 239
Binormaleneinheitsvektor, 78
Biot, Jean-Baptiste, 42
Bogenelement, 78
Bogenlänge, 78
Bohr, Niels, 253
du Bois-Reymond, Paul, 263
Boltzmann, Ludwig, 42, 211
Bolyai, János, 158
Bose, Satyendranath, 222
Breitenkreis, 89
Bromwich, Thomas John l'Anson, 193
Bromwichintegral, 193
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 215, 245

C

Cantor, Georg, 215, 269
Cardano, Gerolamo, 216, 247
Cartan, Élie, 37, 74, 158
Cartan, Henri, 74
cartansche Integrabilitätsbedingungen, 158
cartesische Koordinaten, 141
Cauchy, Augustin Louis, 11, 25, 232, 255, 275
cauchy-schwarzsche Ungleichung, 232
charakteristische Funktion, 206
Christoffel, Elwin Bruno, 112
Christoffelsymbol, 146

Codazzi, Delfino, 76
Coulomb, Charles-Augustin, 42

D

Darboux, Jean Gaston, 82
darbouxches Dreibein, 82
darbouxches n -Bein, 140
Deltafunktion, 170
Dielektrizität, 45
Diffeomorphismus, 49
Differential, 25
Differential der Bogenlänge, 78, 139
Differentialform dritter Stufe, 19
Differentialform erster Stufe, 17
Differentialform nullter Stufe, 17
Differentialform zweiter Stufe, 17
Differentialform, exakte, 27
Differentialform, geschlossene, 27
Differentialgleichung der Hermitepolynome, 281
Differentialgleichung, elliptische, 190
Differentialgleichung, hyperbolische, 190
Differentialgleichung, parabolische, 190
Differentialgleichung, partielle, 190
Dirac, Paul, 13, 170, 172
diracsche Deltafunktion, 170
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 198, 219, 261–264, 267, 272, 288
dirichletsche Kernfunktion, 261
dirichletsche Summenformel, 199
dirichletsches Schubfachprinzip, 219
Distribution, 164
Distribution, temperierte, 291
Divergenz, 39, 153
divergenzfrei, 39
Doetsch, Gustav, 193
Drehfläche, 88
Drehkegel, 92
Drehzylinder, 91
Dreibein, bewegliches, 75
Dreibein, darbouxches, 82
Dreibein, frenetsches, 78
Dreibein, gaußsches, 81
dreidimensionale Kette, 12
dreidimensionale Zelle, 12
Dreiecksfunktion, 210
Dupin, Pierre-Charles-François, 118

dupinsche Indikatrix, 118
dynamische Variable, 254

E

Eigenfunktion, 252
Eigenvektor, 251
Eigenwert, 251
Eigenzustand, 254
einander ausschließende Ereignisse, 218
eindimensionale Kette, 12
eindimensionale Zelle, 12
Einheitsvektor, 228
einschaliges Hyperboloid, 116
Einstein, Albert, 138, 150, 253
elektrische Feldstärke, 42
elektrische Flussdichte, 42
elektromagnetisches Feld, 44
Elementarereignis, 217
Ellipsoid, 116
elliptische Differentialgleichung, 190
elliptischer Flächenpunkt, 111
elliptisches Paraboloid, 116
Energiedichte, 45
Enneper, Alfred, 117
ennepersche Minimalfläche, 117
Eötvös, Loránd, 151
Erdős, Paul, 268
Ereignis, 217
Ereignis, begünstigendes, 226
Ereignis, benachteiligendes, 226
Ereignis, sicheres, 218
Ereignis, unmögliches, 218
Ereignisraum, 217
Ereignisse, einander ausschließende, 218
Ereignisse, voneinander unabhängige, 226
Ergänzungssatz der Gammafunktion, 64
erstes Moment, 235
Erwartungswert, 221, 235, 254
Erzeugende, 89, 116, 117
erzeugende Funktion, 280
Erzeugendengleichung, 280
Erzeugungsoperator, 286
Euler, Leonhard, 63, 64, 204, 229, 230
euler-poissonsches Integral, 63
eulersche Gammafunktion, 63
exakte Differentialform, 27
Exzess, sphärischer, 114

F

Faltung, 187, 194
 Faltungssatz, 187, 194
 Farady, Michael, 42
 Fejér, Leopold, 263–265, 268, 269
 fejérsche Kernfunktion, 264
 fejérscher Approximationssatz, 267
 Feld, elektromagnetisches, 44
 Feldstärke, elektrische, 42
 Feldstärke, magnetische, 42
 de Fermat, Pierre, 216
 flach, 149
 Fläche, 48, 80
 Flächenelement, 38, 95, 153
 Flächenintegral, 48
 Flächenkurve, 102
 Flächenpunkt, elliptischer, 111
 Flächenpunkt, hyperbolischer, 111
 Flächenpunkt, parabolischer, 111
 Flächenstück, 48
 flächentreu, 124
 Flächenverzerrung, 124
 Flussdichte, elektrische, 42
 Flussdichte, magnetische, 42
 Formel von Bayes, 225
 Formel, stirlingsche, 65
 Fourier, Joseph, 183, 192, 197, 200, 201
 Fourierdarstellung der diracschen
 Deltafunktion, 183
 Fourierkoeffizient, 199
 Fourierreihe, 199
 fouriersche Summe, 234
 fouriersches Integraltheorem, 183
 Fouriertransformation, 183
 Franz Joseph, 29, 268
 Frenet, Jean Frédéric, 77
 frenetsches Dreibein, 78
 frenetsches Zweibein, 95
 Frobenius, Georg, 269
 Fuchs, Lazarus, 269
 Fundamentalgröße, 81, 137
 Funktion, charakteristische, 206
 Funktion, erzeugende, 280
 Funktion, greensche, 181
 Funktion, harmonische, 41
 Funktion, lineare, 247

Funktion, quadratisch integrierbare, 279,
 282, 284
 Funktion, verallgemeinerte, 164
 Funktionalgleichung der Gammafunktion, 63
 Funktionenraum, 213

G

Galilei, Galileo, 115
 Gammafunktion, 63
 Ganghöhe, 79, 117
 Gauß, Carl Friedrich, 39, 42, 71, 74, 77, 81, 82,
 108, 111–114, 122, 134, 146, 147, 158, 198,
 242, 244, 270–272
 gaußsche Krümmung, 110
 gaußsches Dreibein, 81
 gaußsches Gesetz, 42
 Gebiet, konvexes, 34
 Gegenereignis, 219
 geodätische Krümmung, 103
 geodätische Linie, 103
 geodätische Torsion, 103
 Geometrie, innere, 122
 Geronno, Camille-Christophe, 115
 geschlossene Differentialform, 27
 geschlossene Kette, 25
 Geschwindigkeit, 105
 Geschwindigkeitsvektor, 105
 Gesetz der großen Zahlen, 247
 Gesetz der Linearität, 227
 Gesetz der positiven Definitheit, 228
 Gesetz der Symmetrie, 227
 Gibbs, Josiah Willard, 211
 gibbssches Phänomen, 211
 Gleichungen von Gauß, 76, 145
 Gleichungen von Mainardi und Codazzi, 76,
 148
 Gnomon, 130
 gnomonische Projektion, 130
 von Goethe, Johann Wolfgang, 42
 Gradient, 38, 153
 Graßmann, Hermann, 213
 Green, George, 39, 181
 greensche Funktion, 181
 Grenzwert, schwacher, 168
 Grenzwert, starker, 163
 Grenzwertsatz, zentraler, 243
 Grossmann, Marcel, 151

Gürtelkreis, 89

H

Hall, Monty, eigentl. Maurice Halperin, 224

Hamilton, Sir William Rowan, 40

Hardy, Godfrey Harold, 193

harmonische Funktion, 41

Häufigkeit, 247

Hauptkrümmung, 110

Hauptkrümmungsrichtung, 110

Hauptverzerrung, 124

Hauptwert, 182

Heaviside, Oliver, 42, 170

Heavisidefunktion, 165

Heisenberg, Werner, 255

heisenbergsche Unschärferelation, 255

Henkelpunkt, 78

Hermite, Charles, 279

Hermitefunktion, 283

Hermitepolynom, 279

Hilbert, David, 252, 277, 287

Hilbertraum, 276

Hölder, Otto, 289

höldersche Ungleichung, 289

Horizontalbeschleunigung, 106

Huygens, Christiaan, 115, 119

huygenssche Lemniskate, 115

Hyperbel, 97

hyperbolische Differentialgleichung, 190

hyperbolischer Flächenpunkt, 111

hyperbolisches Paraboloid, 83

Hyperboloid, einschaliges, 116

Hyperboloid, zweischaliges, 116

hypergeometrische Verteilung, 258

I

Indikatorfunktion, 206

Indikatrix, 118

Induktionsgesetz, 42

Inhaltselement, 143

innere Geometrie, 122

inneres Produkt, 227

Integrabilitätsbedingung, 28

Integral einer Differentialform, 28, 31

Integral, euler-poissonsches, 63

Integralformel, poissonsche, 190

Integralgleichung, 259

Integraltransformation, 184

Integrand, 207

Integrator, 207

J

Jacobi, Carl Gustav, 157, 212

jacobische Identität, 157

Jordankurve, 46

K

Kant, Immanuel, 121

Karte, 121, 134

Katenoid, 117

Kegel, 116

Kehlkreis, 89

Keilprodukt, 18, 19

Kelvin, Lord, bürgerl. William Thomson, 40

Kern, 184, 248

Kernfunktion, dirichletsche, 261

Kernfunktion, fejärsche, 264

Kette, dreidimensionale, 12

Kette, eindimensionale, 12

Kette, geschlossene, 25

Kette, nulldimensionale, 12

Kette, zweidimensionale, 12

Kettenlinie, 117

Kolmogorow, Andrej Nikolajewitsch, 216,
218, 220, 226

Kompasslinie, 128

komplexer linearer Raum, 253

Konfidenzintervall, 246

konform, 124

Kontinuitätsgleichung, 44

konvergent, schwach, 168

konvergent, stark, 163

Konvergenz im quadratischen Mittel, 270

konvex, 34

Koordinate, 122

Koordinate, krummlinige, 122

Koordinaten, cartesische, 141

Korrelationskoeffizient, 236

Kovarianz, 235

Kowalewskaja, Sofia Wassiljewna, 269

Kreiswellenzahl, 180

Kronecker, Leopold, 215, 289

krummlinig, 122

Krümmung, 78, 110

Krümmung, geodätische, 103
 Krümmung, mittlere, 110
 Krümmungsform, 149
 Krümmungskomponenten, riemannsche, 149
 Kugel, 92
 Kugelkoordinaten, 141
 Kurve, 46, 139
 Kurvenintegral, 46
 Kurvenstück, 46

L

Ladungsdichte, 42
 Lagrange, Joseph-Louis, 39
 Lambert, Johann Heinrich, 126
 lambertsche Azimutalprojektion, 152
 lambertsche Zylinderprojektion, 126
 Länge, 78, 94, 139, 228
 Laplace, Pierre Simon, 192, 217, 242, 279
 Laplacegleichung, 189
 Laplaceoperator, 41, 154
 Laplacetransformation, 192
 Lebesgue, Henri, 270, 284
 von Lecoq, Karl Ludwig, 74
 leere Menge, 22, 218
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 11, 17, 25, 95, 96, 160, 164, 201, 286
 leibnizsche Sektorformel, 96
 Leitkurve, 116
 Lemma von Poincaré, 29
 Lemma von Riemann und Lebesgue, 288
 Lemniskate, 115
 Levi-Civita, Tullio, 112, 113
 Lie, Sophus, 156
 Lie-Klammer, 156
 lineare Funktion, 247
 lineare Substitution, 167
 lineare Substitutionsformel, 168
 linearer Operator, 248
 Linie, geodätische, 103
 Linienelement, 38, 152
 Lissajous, Jules Antoine, 115
 Lissajous-Figur, 115
 Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch, 158
 logarithmische Spirale, 133
 Loxodrome, 128

M

magnetische Feldstärke, 42
 magnetische Flussdichte, 42
 Mainardi, Gaspare, 76
 Mannigfaltigkeit, 134
 Mannigfaltigkeit, flache, 149
 Mannigfaltigkeit, gekrümmte, 149
 Markoff, Andrej Andrejewitsch, 245
 markoffsche Ungleichung, 245
 Maß, 217
 Matrix, schiefsymmetrische, 77
 Maximumsnorm, 269
 Maxwell, James Clerk, 40, 42, 45, 211
 Menge, leere, 22, 218
 Mercator, Gerardus, eigentl. Gerard de Kremer, 127
 Mercator, Rumold, 132
 mercatorsche Zylinderprojektion, 127
 de Méré, eigentl. Antoine Gombaud, 215, 220
 Meridian, 89
 Meusnier de la Place, Jean-Baptiste, 109
 Minimalfläche, 117
 Minimalfläche, ennepersche, 117
 Minimalfläche, scherksche, 118
 Minkowski, Hermann, 137, 151, 275, 290
 minkowskische Ungleichung, 275, 290
 Mittellinie, 117
 mittlere Krümmung, 110
 mittlere Verzerrung, 124
 de Moivre, Abraham, 242, 243
 Moment, erstes, 235
 Moment, zweites, 235
 Monge, Gaspard, 109
 Multiplikationsformel, 226

N

Nabelpunkt, 111
 Nabelpunkt, parabolischer, 111
 Nabla, 40
 Napoleon Bonaparte, 109, 183, 192
 n -Bein, bewegliches, 140
 n -Bein, darbouxches, 140
 von Neumann, John, 268, 276
 Newton, Sir Isaac, 11, 17, 65, 106, 180
 Norm im quadratischen Mittel, 272
 Normalbereich, 52
 Normalbeschleunigung, 106

Normaleinheitsvektor, 80
Normaleneinheitsvektor, 78
Normalkrümmung, 103
Normalvektor, 38
Normalverteilung, 244
normierter Zustand, 254
nulldimensionale Kette, 12
nulldimensionale Zelle, 11

O

Oberfläche, 98
Oberflächenelement, 98
Observable, 254
Öffnungswinkel, 92
Operator, adjungierter, 250
Operator, beschränkter, 249
Operator, linearer, 248
Operator, selbstadjungierter, 251
Operator, unbeschränkter, 249
Orientierungstreue, 49
Ørsted, Hans Christian, 42
Orthodrome, 131
Orthogonalitätsrelationen der
Hermitepolynome, 283
Orthogonalitätsrelationen der
trigonometrischen Funktionen, 230
orthographische Azimutalprojektion, 151
Orthonormalbasis, 277
Orthonormalsystem, 231
Ostrogradski, Michail Wassiljewitsch, 39

P

Pacioli, Luca, 216
parabolische Differentialgleichung, 190
parabolische Zylinderkoordinaten, 155
parabolischer Flächenpunkt, 111
parabolischer Nabelpunkt, 111
Paraboloid, eiliptisches, 116
Paraboloid, hyperbolisches, 83
Paraboloidkoordinaten, 155
Paradoxon von Bernstein, 227
Paradoxon von Bertrand, 224
Parallelenaxiom, 158
Parallelogrammregel, 256
Parallelverschiebung, 112, 113
Parseval des Chênes, Marc-Antoine, 278
parsevalsche Identität, 278

Partialbruchzerlegung des Cotangens, 204
Partialbruchzerlegung des Cotangens
hyperbolicus, 204
Partialbruchzerlegung des Kehrwerts vom
Sinus, 204
Partialbruchzerlegung des Kehrwerts vom
Sinus hyperbolicus, 203
partielle Differentialgleichung, 190
Pascal, Blaise, 216
Permeabilität, 45
Petzval, Josef, 193
Picard, Émile, 270
Plancherel, Michel, 287
Planck, Max, 253
Plattkarte, quadratische, 120
Plattkreis, 89
 p -Norm, 289
Poincaré, Henri, 29, 158, 279
poincarésche Halbebene, 158
Poisson, Siméon Denis, 198, 239, 240, 242
poissonsche Integralformel, 190
poissonsche Summenformel, 199
Poissonverteilung, 240
Pólya, George, 268
Polynom, trigonometrisches, 266
Potential, skalares, 44
Poynting, John Henry, 45
Poyntingvektor, 45
Produkt, inneres, 227
Produkt, skalares, 227
Produktregel bei Differentialformen, 28
Profillinie, 117
Projektion, 232, 233
Projektion, gnomonische, 130
Projektion, stereographische, 131
Pseudosphäre, 119
Punkt, 122
Punkt, regulärer, 78
Punkt, singulärer, 78, 80

Q

quadratisch integrierbare Funktion, 279, 282,
284
quadratisch summierbar, 274
quadratische Plattkarte, 120

R

Radialbeschleunigung, 106

- Radó, Tibor, 268
 Rand, 22
 Rand einer Kette, 23
 Rand einer Zelle, 22
 Randbedingung, 179
 Raumintegral, 57
 Raumkurve, 46
 räumlicher Sektor, 100
 Rechtecksfunktion, 210
 Regelfläche, 116
 regulärer Punkt, 78
 Riemann, Bernhard, 77, 134, 137, 149, 151, 207
 riemannsche Krümmungskomponenten, 149
 Riemann-Stieltjes-Integral, 207
 Riesz, Friedrich, 284
 Riesz, Marcel, 268, 284
 Ringintegral, 25
 Rodrigues, Benjamin Olinde, 280
 Rodrigues-Formel, 280
 Rohrfläche, 117
 Rotation, 40, 153
 rotationsfrei, 40
 Roze, Jean, 132
 Rudin, Walter, 29
 Runge, Carl, 269, 270
- S**
- Sägezahnfunktion, 292
 Satz des Pythagoras, 232
 Satz über die konstante Funktion, 175
 Satz von de Moivre und Laplace, 243
 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, 223
 Satz von Gauß und Ostrogradski, 39
 Satz von Green, 39
 Satz von Meusnier, 109
 Satz von Plancherel, 287
 Satz von Poynting, 45
 Satz von Stokes, 36, 39–41
 von Savant, Marilyn, 224
 Savart, Félix, 42
 Schachtelparadoxon, 224
 Scherk, Heinrich Ferdinand, 118
 scherksche Minimalfläche, 118
 schiefssymmetrisch, 77
 Schmiegebene, 78
 Schnittpunkt, 94, 139
 Schnittwinkel, 94, 139
 Schoenflies, Arthur, 269
 Schraubenlinie, 79
 Schraubfläche, 117
 Schubfachprinzip, 219
 schwach konvergent, 168
 schwacher Grenzwert, 168
 Schwartz, Laurent, 162–164, 170, 181, 200
 Schwarz, Hermann Amandus, 26, 232, 269
 Sektor, räumlicher, 100
 Sektorfläche, 96
 Sektorformel, leibnizsche, 96
 selbstadjungierter Operator, 251
 separabel, 277
 sicheres Ereignis, 218
 singulärer Punkt, 78, 80
 skalaes Potential, 44
 skalaes Produkt, 227
 Skalarfeld, 37
 Sobolew, Sergei Lwowitsch, 162–164, 170, 181, 200
 Spektralsatz, 252
 Spektrum, 252
 sphärischer Exzess, 114
 Spirale, logarithmische, 133
 Sprunghöhe, 174
 Sprungstelle, 174
 Spur, 16
 Stammform, 28
 Standardabweichung, 236
 standardisierte Zufallsvariable, 242
 stark konvergent, 163
 starker Grenzwert, 163
 stereographische Projektion, 131
 Stewart, Ian, 225
 Stieltjes, Thomas Jean, 207
 Stirling, James, 65
 stirlingsche Formel, 65
 Stokes, Sir George Gabriel, 36, 37, 40
 Streuung, 235
 Stromdichte, 42
 stückweise stetig differenzierbar, 174
 Summe, fouriersche, 234
 Summenformel, dirichletsche, 199
 Summenformel, poissonsche, 199
 Summenregel bei Differentialformen, 27
 Supremumsnorm, 269

Szegő, Gábor, 268

T

Tangenteneinheitsvektor, 78
Tangentenfläche, 116
Tangentenschmiegepunkt, 78
Tangentenvektor, 122
Tangentialbeschleunigung, 106
Tangentialebene, 80
Tangentialvektor, 38, 139
temperierte Distribution, 291
Testfunktion, 162, 290
Tetraeder, 99
Theorema egregium, 112
Theorema elegantissimum, 114
Thetafunktion, 212
Thetarelation, 212
Thomson, William, 40
Tissot, Nicolas Auguste, 123
tissotsche Verzerrungsellipse, 123
torsal, 116
Torse, 117
Torsion, 78
Torsion, geodätische, 103
Torus, 93
Träger, 162
Traktrikoid, 119
Traktrix, 118
Treppenfunktion, 206
trigonometrisches Polynom, 266
Tschebyscheff, Pafnuti Lwowowitsch, 245, 246, 279
tschebyscheffsche Ungleichung, 245
Turán, Pál, 268

U

Umkehrformel der Fouriertransformation, 183
unbeschränkter Operator, 249
Unbestimmtheit, 255
Ungleichung von Cauchy und Schwarz, 232
Ungleichung von Hölder, 289
Ungleichung von Markoff, 245
Ungleichung von Minkowski, 275, 290
Ungleichung von Tschebyscheff, 245
Ungleichung von Young, 289
unmögliches Ereignis, 218

Unschärfe, 255
Unschärferelation, 255

V

Variable, dynamische, 254
Varianz, 236, 254
Vektor, 134, 213
Vektorfeld, 37, 122, 134
Vektorpotential, 44
verallgemeinerte Funktion, 164
Vernichtungsoperator, 291
Verschiebungssatz, 192
Verteilung der seltenen Ereignisse, 240
Verteilung, hypergeometrische, 258
Vervollständigung, 279
Verzerrung, mittlere, 124
Verzerrungsellipse, 123
Vielfachheit, 12
Viviani, Vincenzo, 115
vivianisches Fenster, 115
vollständig, 273
Volterra, Vito, 270
Volumen, 99
Volumselement, 37, 153
Volumselement zweiter Stufe, 99
voneinander unabhängige Ereignisse, 226

W

Wahrscheinlichkeit, 217
Wahrscheinlichkeit, bedingte, 223
Wahrscheinlichkeitsraum, 217
Wärmeleitungsgleichung, 188, 212
Weierstraß, Karl, 215, 269, 270, 289
weierstraßscher Approximationssatz, 269
Wellengeschwindigkeit, 180
Wellengleichung, 180
Wellenzahl, 180
Wendelfläche, 117
Weyl, Hermann, 215, 245, 277, 287
Winkel, 232
winkeltreu, 124

Y

Young, William Henry, 289
youngsche Ungleichung, 289

Z

Zelle, dreidimensionale, 12
Zelle, eindimensionale, 12

- Zelle, nulldimensionale, 11
- Zelle, zweidimensionale, 12
- zentraler Grenzwertsatz, 243
- Zentripetalbeschleunigung, 106
- Zufallsvariable, 220
- Zufallsvariable, standardisierte, 242
- Zustand, 254
- Zustand, normierter, 254
- Zweibein, frenetsches, 95
- zweidimensionale Kette, 12
- zweidimensionale Zelle, 12
- Zwei-Norm, 234, 272
- zweischaliges Hyperboloid, 116
- zweites Moment, 235
- Zyklus, 25
- Zylinder, 116
- Zylinderkoordinaten, 141
- Zylinderkoordinaten, parabolische, 155
- Zylinderprojektion, 125
- Zylinderprojektion, lambertsche, 126
- Zylinderprojektion, mercatorsche, 127