

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziel dieses Buches	2
1.2	Historisches zur Lehre von Mathematik	2
1.3	Vorgehen in diesem Buch	3
1.4	Die Kapitel	4
1.5	Einige Bemerkungen	8
2	Kryptografie	9
2.1	Die alte und die neue Kryptografie	10
2.2	Primzahlen	14
2.3	Restklassen modulo n	17
2.3.1	Der Modul der Restklassen modulo n	19
2.3.2	Allgemeines Rechnen modulo n	20
2.3.3	Multiplizieren modulo n	22
2.3.4	Potenzieren modulo n	24
2.3.5	Inversenbestimmung modulo n	28
2.3.6	Größter gemeinsamer Teiler und euklidischer Algorithmus	29
2.4	Kryptografische Verfahren	32
2.4.1	Diffie-Hellman-Schlüsselvereinbarung	33
2.4.2	RSA-Verschlüsselung	35
2.4.3	Digitale Signatur	40
2.4.4	Zertifizierung der öffentlichen Schlüssel	41
2.5	Rückblick auf die moderne Kryptografie	43
3	Codierung	45
3.1	Europäische Artikelnummer: EAN	45
3.2	ISBN-13 und ISBN-10	49
3.3	Codierung mit 0 und 1 ist überall	51
3.4	Rückblick auf die Codierung	54
4	Graphentheorie	57
4.1	Allerlei Graphen	57
4.1.1	Euler, Königsberg und Graphen	58
4.1.2	Beschreibung von Graphen	62
4.2	Aufspannende Bäume	64
4.2.1	Minimale Spannbäume	65
4.2.2	Spannbäume in ungewichteten Graphen	66
4.3	Kürzeste Wege	68
4.4	Färbungen	73
4.5	Graphentheorie: Rückblick und Ausblick	76

5	Fraktale, Chaos, Ordnung	79
5.1	Idee von Rekursion und Iteration	81
5.1.1	Spinnwebdarstellung rekursiver Folgen	82
5.1.2	Wachstumsvorgänge	84
5.1.3	Feigenbaumdiagramm	86
5.2	Fraktale und Dimension	89
5.2.1	Wegfraktale, Lindenmayer-Systeme	89
5.2.2	Selbstähnlichkeit und Dimension	93
5.2.3	Iterierte-Funktionen-Systeme (IFS)	95
5.3	Mandelbrot- und Julia-Mengen	100
5.3.1	Das echte Apfelmännchen	100
5.3.2	Julia-Mengen	105
5.4	Muster der Natur	108
5.4.1	Zelluläre Automaten	108
5.4.2	Spiralen mit goldenem Winkel	111
6	Welt der Funktionen	117
6.1	Funktionenfamilien	120
6.1.1	Parabeln und elementare Variationen	120
6.1.2	Geraden und Potenzfunktionen	127
6.1.3	Polynome in ihrer Vielfalt	130
6.1.4	Sinus, Kosinus und Musik	137
6.1.5	Exponentialfunktionen	142
6.1.6	Umkehrfunktionen	144
6.2	Funktionenbauhof	147
6.2.1	Summe von Funktionen	147
6.2.2	Produkt von Funktionen	149
6.2.3	Verkettung von Funktionen	150
6.3	Blick auf den Punkt: Ableitung	151
6.3.1	Ableitungsfunktion	152
6.3.2	Die e-Funktion, das Geheimnis wird gelüftet	157
6.4	Blick auf das Ganze: das Integral	159
6.4.1	Definition des Integrals	162
6.4.2	Weitere Anwendungen des Integrals	165
6.5	Großartiger Zusammenhang	166
6.6	Funktionen in höheren Räumen	171
6.6.1	Funktionen im 3D-Raum	171
6.6.2	Mathematische 3D-Lösungen im Bauwesen	175
6.6.3	Noch höher hinaus	178
7	Optimierung als Ziel	181
7.1	Extremwertaufgaben	181
7.2	Gewinnoptimierung	184
7.3	Lineare Optimierung	184
7.4	Minimalflächen	186

7.5	Methode der kleinsten Quadrate	188
7.6	Optimierung ist überall	190
8	Computer und Mathematik	193
8.1	Binärsystem	194
8.2	Zahldarstellung im Computer	199
8.3	Numerisch arbeitende Werkzeuge	203
8.4	Dynamische Mathematik	205
8.5	Computer-Algebra-Systeme (CAS)	209
8.6	Berechenbarkeit	211
8.7	Computer in unserer Welt	215
9	Numerik	217
9.1	Numerische Verfahren der Analysis	217
9.1.1	Heron-Verfahren für Wurzeln	217
9.1.2	Nullstellensuche	219
9.1.3	Numerische Integration	222
9.2	Für alle Fälle: Polynome	226
9.2.1	Ein Taylor schneidert Polynomkleider, die fast passen	226
9.2.2	Zwischenwerte: Interpolation mit Polynomen	228
9.2.3	Splines: damit es in der richtigen Weise krumm wird	229
9.2.4	Bézier-Splines: frei gestaltete Formen	230
9.3	Fourier-Reihen	232
9.4	Differenzialgleichungen	236
9.5	Ohne Numerik geht es nicht	237
10	Stochastik	239
10.1	Beschreibende Statistik	239
10.2	Wahrscheinlichkeitstheorie	241
10.2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	242
10.2.2	Axiome von Kolmogorow	244
10.2.3	Mehrstufige Zufallsversuche	246
10.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Verteilung	247
10.3.1	Kombinatorik	249
10.3.2	Binomialverteilung	252
10.3.3	Kumulierte Verteilungsfunktionen	258
10.3.4	Normalverteilung	260
10.4	Beurteilende Statistik	266
10.4.1	Schätzen	267
10.4.2	Testen	269
10.5	Stochastik im Rückblick	278
11	Geometrie	279
11.1	Der goldene Schnitt	280
11.2	Die Kegelschnitte	285

11.3	Reflexion bei Parabeln	289
11.4	Reflexion bei Ellipsen und Hyperbeln	293
11.5	Kaustiken und Katakaustiken	298
11.6	Geometrie im Rückblick	299
12	Selbstverständnis der Mathematik	301
12.1	Mathematiker und Mathematikerinnen	301
12.2	Algebra und Zahllaufbau	303
12.3	Mathematische Schönheit	307
12.4	Beweisen	309
12.5	Die unlösbaren Probleme der Antike	314
12.6	Fazit	316
13	Lösungen	317
	Literaturverzeichnis	323
	Index	333