

Inhaltsverzeichnis

1	Der Goldene Schnitt	1
1.1	Eine göttliche Teilung	2
1.2	Die Mathematik hinter dem Goldenen Schnitt	4
1.2.1	Das Pentagramm	4
1.2.2	Eine mathematische Eigenschaft	5
1.3	Arbeitsaufträge	26
1.3.1	Der Modulor von Le Corbusier	26
1.3.2	Der Goldene Schnitt als Schönheitsideal?	30
1.3.3	Phyllotaxis	33
1.3.4	Nabelschau von Kopf bis Fuß	36
1.3.5	Rätseln mit der Fibonacci-Folge	36
1.3.6	Die Goldene Spirale	38
1.3.7	Optimierung eines chemischen Prozesses	41
1.4	Bildnachweise	43
1.5	Websites und Literatur	43
	Bibliografie	45
1.6	Lösungen	45
2	Vielseitige Kugeln	49
2.1	Viele kleine Flächen bilden eine Kugel	51
2.2	Über regelmäßige Vielecke	53
2.3	Vier, fünf, sechs... Flächen	56
2.4	Prismen, Pyramiden, Antiprismen und noch mehr	59
2.5	Die Formel von Euler	61
2.6	Die fünf regulären Polyeder	66
2.7	Halbreguläre Polyeder	69
2.8	Dualität	73
2.9	Geodätische Kuppeln	77
2.10	Fullerene	83
2.11	Übersicht: Geodätische Kuppeln und Fullerene	87

2.12	Abschließender Arbeitsauftrag: Entwirf Deine eigene Kugel . . .	88
2.13	Lösungen zu den Aufgaben	89
2.14	Lösungen zu den Applets	97
3	Perspektive - wie muss man das sehen?	101
3.1	Die Anfangsgründe der Perspektive	102
3.2	Perspektivische Verzerrung	105
3.3	Das Triptychon der Perspektive	111
3.4	Einpunktperspektive	119
3.5	Zweipunktperspektive	126
3.6	Zweipunktperspektive mit geneigter Bildebene	132
3.7	Dreipunktperspektive	135
3.8	Abschließender Arbeitsauftrag	142
3.9	Lösungen zu den Aufgaben	142
3.10	Anhang: Der Satz des Thales	150
	Literaturhinweise	153
4	Schiebereien mit Autos, Münzen und Kugeln	155
4.1	Der optimale Parkplatz	157
4.1.1	Quadratische Parkplätze	158
4.1.2	Eine untere Schranke	162
4.1.3	Eine obere Schranke	165
4.2	Coladosen auf einem Tablett	166
4.2.1	Kreise in der Ebene	167
4.2.2	Dreieckige Tablett: Lösungen suchen	169
4.2.3	Sieben Münzen: Lösungen berechnen	170
4.2.4	Vier Münzen: Ein Beweis	172
4.2.5	Stabile Stapel	175
4.2.6	Das Problem von Malfatti	177
4.3	Gestapelte Kanonenkugeln	179
4.3.1	Die Anzahl von Kugeln in einem Stapel	180
4.3.2	Die Höhe eines Stapels	185
4.3.3	Die Vermutung von Kepler	186
4.4	Anhang 1: Lösungen zu den Aufgaben	190
4.5	Anhang 2: Das gleichseitige Dreieck	194
5	Eine kühle Sicht der Wahrheit	199
5.1	Einleitung	200
5.2	Was ist beweisbar?	202
5.2.1	Rechtsprechung	202
5.2.2	Wirtschaft	203
5.2.3	Physik	203
5.2.4	Beweise in der Mathematik	204
5.3	Beweisbeispiele	206

5.3.1 Begriffe 206
 5.3.2 Wie ein Beweis aussieht 209
 5.4 Der Stil eines mathematischen Beweises 217
 5.4.1 Wie ausführlich muss ein Beweis sein? 217
 5.4.2 Bemerkungen zur Logik 219
 5.4.3 Widerspruchsbeweis 221
 5.4.4 Vollständige Induktion 222
 5.4.5 Zurückführen auf eine bekannte wahre Aussage 226
 5.4.6 Gibt es ein Rezept für Beweise? 227
 5.5 Die Regeln des Spiels 236
 5.5.1 Axiomatik 236
 5.5.2 Intuitionismus 238
 5.5.3 Intermezzo: Der Platonismus 239
 5.5.4 Gödels Bombe geht hoch 239
 5.5.5 Beweise und Computer 241
 5.5.6 Das Spiel mit den Regeln 242
 5.6 Hinweise zu den Aufgaben 242
 5.7 Websites und Literatur 245

Literaturhinweise 247

6 Nicht-Euklidische Geometrie und ihre Geschichte 249
 6.1 *Die Elemente* von Euklid 250
 6.1.1 Axiomatischer Aufbau 251
 6.1.2 Das Parallelenpostulat 253
 6.1.3 Sätze, die ohne das Parallelenpostulat beweisbar sind .. 255
 6.1.4 Sätze, die mit dem Parallelenpostulat bewiesen werden . 258
 6.1.5 Die Winkelsumme im Dreieck 259
 6.1.6 Weitere Untersuchungen der *Elemente* von Euklid 262
 6.2 „Beweise“ des Parallelenpostulats 262
 6.2.1 Wallis 263
 6.2.2 Saccheri 266
 6.3 Die Begründer der nichteuklidischen Geometrie 270
 6.4 Ein Modell der elliptischen Geometrie 276
 6.4.1 Gilt das Parallelenpostulat? 277
 6.4.2 Die Winkelsumme im Dreieck 277
 6.5 Ein Modell der hyperbolischen Geometrie: Poincarés
 Kreisscheibenmodell 278
 6.5.1 Vorbereitungen mit Cabri 279
 6.5.2 Das hyperbolische Postulat 283
 6.5.3 Die Winkelsumme im Dreieck 284
 6.5.4 Nichteuklidische Abstände 284
 6.5.5 Parallele Geraden 285
 6.5.6 Hyperbolische Kreise 285

6.5.7	Weitere Untersuchungen zur Poincaré-Kreisscheibe und zur hyperbolischen Geometrie	286
6.5.8	Unterschiede zwischen der Euklidischen und der Nicht-Euklidischen Geometrie	286
6.6	Arbeitsaufträge	287
6.6.1	Untersuche die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie in den Werken von Escher	287
6.6.2	Verfasse eine ausführliche Biographie einer Person, die eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie spielte.....	288
6.6.3	Untersuche ein anderes Modell der hyperbolischen Geometrie: Das Beltrami-Klein-Modell	289
6.6.4	Untersuche Gauß' weitere Bedeutung für die Mathematik	290
6.6.5	Untersuche weitere Resultate der hyperbolischen Geometrie im Modell von Poincaré	290
6.6.6	Untersuche den weiteren Inhalt von <i>Die Elemente</i> von Euklid	291
	Literaturhinweise	293
	Autoren und Herausgeber	295
	Namens- und Sachverzeichnis	299