

Inhalt

Vorwort	v
Inhalt	ix
Einleitung	xix
1. Die Erfindung der formalen Algebra durch Descartes	1
Der Stand der Dinge vor Descartes: Galilei um die Jahre 1623–38	1
Die geläufige Version	1
Die tatsächliche Version	2
Descartes' mathematische Großtat	3
Erster Versuch: Descartes' Algebra mit Figuren (bis 1628)	4
Das Ausgangsproblem	4
Die »Regulae«: Rechnen mit Figuren	6
Die Leistungsfähigkeit des menschlichen Denkens	6
Descartes' Vorgehensweise	7
Was sind Figuren, und wie soll mit ihnen verfahren werden?	8
Descartes' Zielsetzung	11
Zweiter Versuch: Descartes' Algebra mit Streckenlängen (ab 1637) – die Erfindung der formalen Algebra	17
Die grundlegenden Konstruktionen	18
Reflexion 1	19
Die bahnbrechende Erfindung	21
Die Erfindung der rein formalen Gleichung	25
Reflexion 2	26
Die Rückbindung der algebraisch gefundenen Gleichungslösung an die Geometrie	28
Descartes hat nur positive Größen – und keine Koordinaten	30
Ergebnis	31
Ein Blick auf Descartes' Ontologie	31
Substanz, Attribut, Modus	32
Zwei Substanzen	32
Geometrie und Arithmetik bei Descartes	34
Bewegung in der Mathematik	35
Ein ontologischer Nachtrag	38

Historiografische Nachträge	38
Die Erfindung der Operationszeichen + und –	38
Das cossische Rechnen	43
Recorde oder: Die Erfindung des Gleichheitszeichens	45
Viète oder: Rechnen mit geometrischen Figuren – nicht formal	46
Eine weltgeschichtliche Analogie zu Descartes' Leistung	48
Die Anfänge von Descartes' Gleichungslehre	52
Warum „Algebra“?	59
Descartes' Leistung für die Grundlagen der Mathematik	60
Warum also „Algebra“?	61
Zur philosophischen Bedeutung von Descartes' Leistung für die Mathematik	63
2. Die Erfindung der stetig Veränderlichen durch Leibniz	65
Die bei Descartes verbliebene Begriffsücke	65
Verschiedene Arten von Gleichungen	65
Worin besteht das Problem bei Descartes?	67
Descartes' Ablenkungsmanöver	68
Die Lösung des Descartes'schen Problems in der Analysis: eine Begriffsverschiebung	70
Der Gegenstand	70
Die Bedeutung dieser Lösung des Descartes'schen Problems	70
Eine Bewertung dieser Lösung	70
Wie kann Leibniz zum Begriff der veränderlichen Größe kommen?	71
Zu Leibniz' Begriff der Monade	71
Leibniz' Begriff der Veränderung	73
Leibniz' Begriff(e) von (Raum und) Zeit	78
Leibniz' Begriff der Zahl	79
Der junge Leibniz war Pythagoreer	79
Ontologisch gefragt: Was ist die Zahl?	80
Begrifflich gefragt: Wie ist „Zahl“ bestimmt?	80
Das Verfahren der Größen- und der Zahlbestimmung	85
Zur Deutungsgeschichte des Leibniz'schen Zahlbegriffs	89
Zwei Schlussbemerkungen zu Leibniz' Zahlbegriff	99
Das erste allgemeine Konvergenzkriterium	101
Die Quelle	101
Aus dem Inhalt	102
Das Konvergenzkriterium (ohne den Begriff der Konvergenz)	102
Leibniz' Technik der Infinitesimalrechnung: strenge Epsilontik – das Riemann-Integral	105
Die Konstruktion	106
Der Beweis	108

Bedingungen an diesen Beweis	109
Das Neuartige an diesem Beweis	110
Der Preis des Neuartigen	110
Leibniz' Begründung der Differenzialrechnung	111
Die Quelle	111
Das Kontinuitätsgesetz	111
Unendlich kleine und unendlich große Größen – als „erdichtete“	113
Die Differenzialregeln	117
Leibniz erweitert den Geltungsbereich der Mathematik	122
Der Ausgangspunkt: Descartes' <i>La Géométrie</i>	122
Leibniz' Erweiterungsprogramm	123
Durch die Einführung der veränderlichen Größe wird das Kontinuum zu einem Gegenstand der Mathematik	124
Transzendente Zahlen	125
Das Kontinuum besteht nicht nur aus Zahlen	127
Leibniz als Begriffs- und Symbolerfinder	128
Characteristica universalis	128
Von Leibniz erfundene Symbolik	128
Einige von Leibniz angeregte Konstruktionen und Begriffe	130
Die Erfindung der stetig Veränderlichen und der Epsilontik	136
Der Begriff der Veränderlichen	136
Die „Stetigkeit“ der Veränderung	137
Nochmals: Was ist für Leibniz eine Veränderliche?	138
Historiografischer Nachtrag I – die Indivisibeln	140
Das Indivisibel im scholastischen Kontinuumsbegriff	140
Cavalieri	140
Unverständnis	143
Torricellis Indivisibeln	144
Fermat, Roberval	146
Fazit	146
Historiografischer Nachtrag II – die Stetigkeit des Kontinuums	147
Historiografischer Nachtrag III – Newtons Fluxionsrechnung	148
Newtons mathematische Grundbegriffe	148
Newtons Verfahrensweise	150
Newtons Fluxionsmethode: die „Methode der verschwindenden Größen“	150
Analyse	160
Rückblick	161
3. Die Grundlagen der Algebraischen Analysis	163
Johann Bernoullis Kalkül der Differenziale	163
Eine vage Diffusion von Ideen	163
Leibniz' Publikation der Differenzialregeln	163

Johann Bernoullis Differenzialkalkül	166
Zusammenfassung: Der Wechsel von der Geometrie zur Algebra	179
Die heftige Kontroverse zwischen Leibniz und Johann Bernoulli – vom geometrischen Differenzial zur unendlich kleinen Zahl?	179
Ein Nachtrag zur Kettenregel	187
l'Hospitals Umsetzung der Vorgabe Johann Bernoullis	188
Veränderliche und Konstante	188
l'Hospitals Begriff des Differenzials	189
Die Forderung	190
Differenzialregeln	190
l'Hospital ist konsequenter als Johann Bernoulli	192
Die Weitergabe von Johann Bernoullis Differenzialkalkül	193
Eulers Begriffe von Funktion und Zahl	193
Vorspiel	193
Die Inthronisierung des wichtigsten Begriffs der Analysis: Funktion	194
Eulers Algebra mit Größen	216
Eulers Zahlbegriff	223
Konvergenz	245
Stetigkeit	253
Eulers Denkmuster der Analysis: „Algebraische Analysis“	255
Vier Weiterführungen	255
(1) d'Alemberts Begriff der Größe: eine Kritik an Euler	255
(2) Der Begriff der Größenordnung	258
(3) Die Taylorreihe in der Algebraischen Analysis – Lagrange	261
(4) Das Konvergenzverständnis von Lacroix	267
Was war die Algebraische Analysis?	268
Johann Bernoullis Beitrag	268
Eulers Denken der Algebraischen Analysis	270
4. Die Begründung der Werte-Analysis	275
Vom Wandel der Dinge	275
Der doppelte Auftakt, Teil 1: Bernard Bolzano 1817	276
Bolzanos Zielsetzung	277
Bolzanos Durchführung seines Programms	281
Bolzanos Funktionenlehre	292
Der doppelte Auftakt, Teil 2: Augustin-Louis Cauchy 1821	297
Das Programm	297
Cauchys Stufenaufbau der Grundlagen der Analysis	300
Veränderliche, Grenze, Irrationalzahlen, Funktion, Funktionswert und unendlich Kleine	303
Stetigkeit und Konvergenz – die Definitionen	314
Differenzenverhältnis und Ableitung	331

Das Differenzial bei Funktionen einer Veränderlichen	336
Das Integral	339
Rekapitulation der Revolution	344
5. Das analytische Interregnum von 1817 bis 1872	351
Nichtverstehen der Cauchy'schen Analysis	351
Niels Henrik Abel 1826	351
Zusammenfassende Bewertung von Abels Kritik	355
Philipp Ludwig Seidel 1850	355
Unsicherheiten beim Begriff des Funktionswerts	362
Ein einziger treuer Cauchy-Leser?	362
Dirichlets zögerliche Position	363
Riemanns klarer Schnitt beim Funktionsbegriff stößt das Tor zur Mengenlehre auf	370
Riemann übersieht den Sachverhalt der gleichmäßigen Konvergenz	376
Die Ambivalenz der Werte-Revolution	380
Gleiche Bestimmungen von Stetigkeit und Konvergenz	380
Zwei sehr unterschiedliche Funktionsbegriffe	380
Ergebnis	381
Unterschiedliche Methodiken	382
Cauchys ‚Grenzwertsprache‘	382
Riemanns ‚Epsilontik‘	382
‚Epsilontik‘ contra ‚Grenzwertsprache‘	383
Missverständnisse	383
Methodisches Fazit und eine fachliche Konsequenz	387
Weierstraß' Ringen um die Grundbegriffe der Analysis	388
Größe, Grenze, Kontinuum	389
Der „Satz vom Verdichtungspunkt“	399
Weierstraß' Funktionsbegriff (im Wandel)	402
Weierstraß' hartnäckige Arbeit am Zahlbegriff	415
Ein veränderter Blick auf Weierstraß	439
6. Konsolidierung (1) – Die Erfindung der reellen Zahlen im Jahr 1872	447
Die Situation ante	447
Hankels Bestandsaufnahme zum Begriff der irrationalen Zahl im Jahr 1867	447
Die Artikulation der Misere durch Eduard Heine	452
Rückblick: Weierstraß' Konstruktion	454
Cantors Blick auf Weierstraß' Konstruktion	454
Cantors Deutung von Weierstraß' Konstruktion	456

Die Neuschöpfung – Variante 1: Cantor und Heine 1872	458
Cantor: Zahlgrößen im weiteren Sinne	458
Eine Hierarchie neuer Zahlbereiche – Die Gleichheit	463
Heines Versuch der Reduktion der Hierarchie	465
Eine erste topologische Fassung des „Satzes von Bolzano-Weierstraß“	468
Freges Kritik an Cantors und Heines Begriffsbildungen	468
Logische Unterscheidungen	469
Der ontologische Aspekt: Was ist „Zahl“?	469
Was ist „Gleichheit“?	470
Freges Kritik am <i>formalen</i> Zahlbegriff	471
Woher und warum hat Heine den Begriff der „Zahl“ als „Zeichen“?	474
Freges Ablehnung der neuen Relationen	475
Was hat Frege übersehen? – Der analytische Zugewinn des neuen Zahlbegriffs	477
Die Neuschöpfung – Variante 2: Dedekind 1872	479
Nochmals Cantor 1872: Der Bezug zur Geometrie	479
Die Entstehung der Schrift	481
Dedekinds Vorgehen: Eine Analogie von Arithmetik und Geometrie	482
Die „Stetigkeit“ der geraden Linie	483
Die Schöpfung der irrationalen Zahlen	488
Reflexion	496
Freges Kritik an Dedekinds Konstruktion	501
Russells Glättung der Dedekind’schen Konstruktion	504
Nachtrag: Mérays Skizze aus dem Jahr 1869	508
Zwei Prinzipien	508
„Fiktive Grenzen“	510
Rekapitulation und Einschätzung	513
Drei Jahre später	514
Rückblick auf die Revolution des Zahlbegriffs	517
Welches neuen Konstruktionsmittels bedienen sich Cantor, Heine und Dedekind? – Die Einführung des „aktualen“ Unendlich in die Mathematik	518
Ausblick auf eine lange unterbliebene Revolution des Zahlbegriffs:	
Die Ω -Analysis 1958	519
Rekapitulation der Herkunft des Cantor’schen Zahlbegriffs	519
Die Ω -rationalen Zahlen	520
Quasirationale Ω -Zahlen	522
Anordnungen der Ω -rationalen Zahlen	523
Drei verschiedene Arten des Größenvergleichs	524
Grenzwerte für Ω -rationale Zahlen	532
Warum nicht?	538
Eine intensionale Fassung des Zahlbegriffs: Husserl	539
Die Zielsetzung	539
Der Ausgangspunkt	540

Die Unterscheidung von „Vielheit“ und „kollektive Verbindung“	541
Zugängliche Zahlen	545
Symbolische Zahlen	549
Rechnen	551
Zur Bedeutung des dekadischen Zahlensystems	557
Ausblick	559
Die Axiomatisierung der reellen Zahlen durch Hilbert	559
„18 Axiome“	560
Pro und contra axiomatische Methode	564
Standortbestimmung zum Zahlbegriff und Ausblick	573
Das Neue am Zahlbegriff seit 1872	574
Sind die Ω -Zahlen die modernen Inkommensurablen?	575
Das Verschwinden der „unendlich kleinen“ Größen aus der Analysis	576
Die Abdankung des begrifflichen Denkens	577
Willkürliches Denken	578
Die Neugründung der Mathematik	580
7. Konsolidierung (2) – Die Suche nach einem Substrat für den Funktionsbegriff	581
Heine: Funktionenlehre über dem neuen Zahlbegriff	581
Eine erste Konsequenz für die Funktionenlehre über dem neuen Zahlbegriff	582
Eine zweite Konsequenz	583
Der Zwischenwertsatz	585
Die gleichmäßige Stetigkeit	585
Nach Riemann lange nichts Neues	586
Der Gegensatz zwischen Weierstraß' und Riemanns Funktionsbegriff	586
Die Tradition der deutschsprachigen Literatur folgt Riemann	588
Die französische Tradition	597
Der offizielle Entwicklungsstand des Funktionsbegriffs am 10. August 1899	606
Klein: Mathematik als Theorie der Naturerscheinungen	611
Mathematik vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus	612
Zwei grundlegende Sätze in der Sprache der Mengenlehre	623
Die unabhängig Veränderliche	624
Der Begriff der Funktion	625
Stetigkeit	627
Das bestimmte Integral	635
Die vernünftigen Funktionen	635
Zwischenbilanz im Jahr 1913	637
Vorspiel: Georg Cantor 1895	638
Nachtrag: Cantors Mengenbegriff	638

„Funktion“ zwischen „Mengen“	638
Pasch: Die Funktion als Menge (1)	639
Paschs Anfangsbegriffe	639
Reihe und Menge	642
Wert und Veränderliche	643
Argument, Abhängigkeit und Funktion	644
Zweierlei Stetigkeit	648
Hausdorff: Die Erfindung der Mengen-Analyse – die Funktion als Menge (2)	650
Richtigkeit vor Plausibilität	650
Der mengentheoretische Begriff „Funktion“	651
Drei verschiedene Begründungsweisen der ‚Mengen-Analyse‘: je nach Geschmack	653
Topologie als Umgebungssystem	654
Aus eins mach zwei: Von der „Grenze“ zu „Limes“ und „Häufungspunkt“	656
„Stetigkeit“ als topologischer Begriff	657
Was der Punktmengen-Analyse nach Hausdorff fehlt	658
Metrischer Raum	659
Ein Fazit für ‚Epsilonik‘ und ‚Grenzwertsprache‘	661
Nach dem großen Kulturbruch	661
Eine erste Monographie: Hahn 1921	661
Kurze Bemerkungen zur Lehrbuchliteratur	663
Standortbestimmung zum Funktionsbegriff und Ausblick	666
Rückblick auf die Entwicklung des Funktionsbegriffs in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts	666
Ontologische Standortbestimmung der heutigen Analysis	666
Ausklang: Das aktuelle Unendlich – der philosophische Joker in der heutigen Mathematik	671
Umbrüche des mathematischen Denkens	671
Wie ist es um die Strenge der Mathematik bestellt?	675
Welche Eigenschaften hat das aktuelle Unendlich?	676
Beispiel Logik	676
Beispiel Arithmetik	677
Ein Drittes gibt es nicht	677
Frühere Betrachtungsweisen	678
Bolzano	678
Dedekind und Cantor	679
Standard- und Nichtstandard-Analysis	680

Strenge in der Mathematik: eine auf Willkür gegründete Notwendigkeit	680
Die Macht der Geschichte	681
Eine Lehre	681
(Mathematische) Wahrheiten	682
Zum Abschied	683

Verzeichnisse

Literatur	685
Personen	721
Technik	731
Sachen	735