

Inhaltsverzeichnis

1 Besondere Bedingungen des Forschungsfeldes	1
1.1 Die epistemologischen Besonderheiten mathematischen Wissens	4
1.2 Kommunikationsbegriff nach Luhmann	18
1.2.1 System-Umwelt-Differenz und Autopoiesis	18
1.2.2 Kommunikation	23
1.2.2.1 Eine Begriffsbestimmung	23
1.2.2.2 Relevanz von Luhmanns Kommunikationsbegriff für das Forschungsvorhaben	28
1.3 Konsequenzen für das Forschungsprojekt	31
2 Die Entwicklung des frühen symbolischen Verstehens im kindlichen Spiel aus Sicht der Lern- und Entwicklungspsychologie	35
2.1 Das Symbol – eine erste grundlegende Begriffsbestimmung nach DeLoache	39
2.2 Die Anfänge des Spielens – Grundlagen für ein erstes Symbolverständnis	43
2.3 Das Konstruktions- und Bauspiel	46
2.4 Fantasie- und Rollenspiele – die Entwicklung des Symbolverständnisses	48
2.4.1 Eine Begriffsbestimmung des Fantasie- und Rollenspiels	49

2.4.2	Überblick über die Entwicklung des Fantasie- und Rollenspiels	49
2.4.3	Ausgewählte Meilensteine in der Entwicklung des Fantasie- und Rollenspiels	51
2.5	Konsequenzen für das Forschungsprojekt	56
3	Arbeits- und Anschauungsmittel als semiotische Zeichenträger für mathematisches Wissen	65
3.1	Arbeits- und Anschauungsmittel: eine Begriffsbestimmung	68
3.2	Die Konkretheit der Arbeits- und Anschauungsmittel aus traditioneller Sicht	70
3.3	Kritische Positionen zur Konkretheit der Arbeits- und Anschauungsmittel	73
3.4	Verschiedene Funktionen von Arbeits- und Anschauungsmitteln	79
3.4.1	Würfel als Bauelemente und erste Kritzeleien als Schöpfung mit zunehmender Bedeutung	81
3.4.2	Würfel als Zählgegenstände	83
3.4.3	Arbeits- und Anschauungsmittel als Elemente in einer systemisch-relationalen Struktur	85
3.5	Konsequenzen für das Forschungsprojekt	95
4	Besondere Charakteristika der Nutzung und Funktion semiotischer Mittel in mathematischen Deutungsprozessen	99
4.1	Diagrammatizität und Referenz im Mathematikunterricht	104
4.1.1	Peirces Semiotik und das Konzept des Diagramms im Mathematikunterricht	106
4.1.2	Referenzobjekte und Diagramme	112
4.1.3	Zusammenfassende Auflistung der wichtigsten Punkte	122
4.2	Ikonizität – Ähnlichkeit als Beziehung zwischen Zeichenträger und Bezeichnetes / Bedeutung	124
4.2.1	Ikonizitätskritik	127
4.2.2	Graduelle Unterschiede ikonischer Zeichen	131
4.2.3	Zusammenfassende Auflistung der wichtigsten Punkte	138
4.3	Interne Strukturierung und konstruktive Funktion als spezifische Charakteristika mathematischer semiotischer Mittel – Das Beispiel von Emilia	139

4.3.1	Beschreibung von Emilias Zeichnungen mit erster Analyse	141
4.3.1.1	Zeichnung zur Teilaufgabe b) im Kontext ‚Boote‘	142
4.3.1.2	Zeichnungen zur Teilaufgabe f) im Kontext ‚Boote‘	145
4.3.2	Weiterführende Analysen von Emilias Zeichnungen im Kontext ‚Boote‘	148
4.3.2.1	Zeichnung zur Teilaufgabe b): Realität abbildende Funktion und Ähnlichkeit	149
4.3.2.2	Zeichnungen zur Teilaufgabe f): konstruktive Funktion und Strukturierung	155
4.4	Die besondere Mediation von Zeichenträger und Bedeutung / Bezeichnung	171
4.4.1	Das epistemologische Dreieck	173
4.4.2	Die Dualität von Zeichen / Symbol und Gegenstand / Referenzkontext	174
4.4.3	Präzisierender Rückblick: Die besondere Mediation	180
4.4.4	Fazit	191
5	Das Konstrukt: <i>Didaktische Theorie mathematischer Symbole</i>	197
5.1	Zur Genese des Theoriekonstrukts	198
5.1.1	Zusammenführung der theoretischen Vorannahmen und ihre Ausdifferenzierung	201
5.1.2	Ausdifferenzierung des Theoriekonstrukts anhand der Daten	204
5.2	Epistemologische Analyse des Verhältnisses von Sache und Mathematik	206
5.2.1	Die komplementäre Wechselbeziehung zwischen Sache und Mathematik	207
5.2.2	Eine erste Annäherung an das Theoriekonstrukt ‚ThomaS‘	217
5.2.3	Beispiele aus der Pilotierung zur weitergehenden Charakterisierung der drei Sichtweisen	218
5.2.3.1	Peters Erklärungen und Überarbeitung seiner Zeichnung (Kontext ‚Kirschen‘)	221
5.2.3.2	Peters Erklärungen und Überarbeitung seiner Würfeldarstellung (Kontext ‚Kirschen‘)	229

5.3	Sichtweisen und Übergänge im Theoriekonstrukt	254
5.3.1	Alltagssicht	256
5.3.2	Zahlen-und-Größen-Sicht	264
5.3.3	Systemisch-relationale Sicht	275
5.4	Übersicht der symbolischen Deutungen und Übergänge	292
6	Methodik und Design der Untersuchung	295
6.1	Sachlich eingekleidete Textaufgaben – ein Netzwerk	297
6.1.1	Aufgaben der Prä-Interviews – Vorstellung und Analyse	299
6.1.2	Aufgaben der Post-Interviews – Vorstellung und Vernetzung	308
6.2	Entwicklung einer Interviewform als geeignete Erhebungsmethode	323
6.2.1	Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung	323
6.2.2	Die Pilotierung – Entstehung der (neuen) Interviewform	325
6.2.2.1	Pilotierung Phase I: Ausdifferenzierung eines ersten Interviewleitfadens	327
6.2.2.2	Pilotierung Phase II: Erprobung von Partnerinterviews	330
6.3	Erhebung des Datenmaterials: Planung, Durchführung und Dokumentation der Hauptstudie	333
6.3.1	Die Interviews	335
6.3.1.1	Beschreibung der Interviewform – allgemein	335
6.3.1.2	Anmerkungen zur Konzeption der einzelnen Interviews	338
6.3.1.2.1	Das Prä-Interview	339
6.3.1.2.2	Das erste Post-Interview	341
6.3.1.2.3	Das zweite Post-Interview	343
6.3.1.2.4	Das dritte Post-Interview	344
6.3.2	Dokumentation der Daten	348
6.3.3	Die Intervention	349
6.3.4	Rahmenbedingungen der Untersuchung	355
6.4	Auswertung des erhobenen Datenmaterials: Verfahren der Interviewanalyse	357

7	Epistemologische Analysen ausgewählter Szenen	363
7.1	Analyse Liam: Material als Zeichenträger – Kontext ,Kirschen‘ c)	364
7.1.1	Schritt 5: Interpretative Analyse der Szene unter epistemologischer Perspektive	365
7.1.2	Schritt 6: Zusammenfassung der Analyse und aufschlussreiche Konsequenzen	386
7.2	Analyse Nahla: Würfel als Zeichenträger – Kontext ,Kirschen‘ e)	393
7.2.1	Schritt 5: Interpretative Analyse der Szene unter epistemologischer Perspektive	394
7.2.2	Schritt 6: Zusammenfassung der Analyse und aufschlussreiche Konsequenzen	459
7.3	Analyseszene Halina: Holzwürfel als Zeichenträger – Kontext ,Kirschen‘ e)	472
7.3.1	Schritt 5: Interpretative Analyse der Szene unter epistemologischer Perspektive	473
7.3.2	Schritt 6: Zusammenfassung der Analyse und aufschlussreiche Konsequenzen	550
8	Theoriebasierte Ergebnisse und ihre Bedeutung für die Mathematikdidaktik und Schulpraxis	565
8.1	Verallgemeinernde Zusammenfassung der Analyseergebnisse im wissenschaftstheoretischen Kontext	566
8.1.1	Didaktische Theorie mathematischer Symbole als zentrales Forschungsergebnis	568
8.1.2	Erkenntnisse der Analysen	572
8.1.2.1	Liam	573
8.1.2.2	Nahla	577
8.1.2.3	Halina	580
8.1.3	Die spezifische Kommunikation in mathematischen Gesprächen mit Grundschulkindern	584
8.2	Bedeutung und Erkenntnisse für die Wissenschaft <i>Mathematikdidaktik</i>	587
8.3	Bedeutung und besondere Bedingungen der Anwendung und Nutzung der gewonnenen Erkenntnisse in der Schulpraxis	591

8.4 Weiterführung der zentralen Erkenntnisse und Schlussfolgerungen	594
Anhang	603
Literaturverzeichnis	693