

Inhaltsverzeichnis

1	Vorgeschichte	1
1.1	Die Anfänge der Mathematik als Wissenschaft	1
1.2	Geometrische Konstruktionen in der Antike	2
2	Die natürlichen Zahlen	11
2.1	Die vollständige Induktion	15
2.2	Primzahlen	17
2.3	Das PASCALSche Dreieck	21
2.4	Zahlenfolgen	23
3	Elemente und Mengen	25
3.1	Allgemeine Begriffe	25
3.2	Die RUSSELLSche Antinomie	27
3.3	Grundlegende Mengenoperationen	29
3.4	Das Produkt von Mengen	31
3.5	Relationen	32
4	Die ganzen Zahlen	35
4.1	Die Konstruktion der ganzen Zahlen	35
4.2	Beweise für die Primzahlvermutungen	41
4.3	Die Anordnung von $\mathbb{Z}$ auf dem Zahlenstrahl	44
4.4	Die Abzählbarkeit unendlicher Mengen	46
4.5	Die algebraische Struktur von $\mathbb{Z}$	47
5	Die rationalen Zahlen	55
5.1	Die Konstruktion der rationalen Zahlen	55
5.2	Der absolute Betrag und die Division in $\mathbb{Q}$	58
5.3	Der binomische Lehrsatz	63
5.4	Die Folge der Fibonacci-Brüche	65
5.5	Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Teil I	67
5.6	Folgen, Reihen, Konvergenz und Grenzwerte	69
5.7	Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Teil II	76

6	Die reellen Zahlen	81
6.1	Die Konstruktion der reellen Zahlen	82
6.2	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	86
6.3	Sind die reellen Zahlen abzählbar?	93
6.4	Potenzen mit rationalen Exponenten	95
6.5	Das Geheimnis der FIBONACCI-Bruch-Folge	96
6.6	Algebraische Zahlen in $\mathbb{R}$	100
6.7	Ein Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen	102
7	Die komplexen Zahlen	107
7.1	Die Konstruktion der komplexen Zahlen	107
7.2	Irreduzible Polynome und maximale Ideale	108
7.3	Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$	111
7.4	Die komplexe Zahlenebene	113
7.5	Glückwunsch, das Zahlensystem ist komplett	115
8	Elemente der linearen Algebra	117
8.1	Vektorräume	118
8.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	120
8.3	Eine mysteriöse Frage	124
8.4	Matrizen und Determinanten	127
8.5	Basiswechsel und Spur von Matrizen	143
8.6	Lineare Gleichungssysteme	144
9	Funktionen und Stetigkeit	149
9.1	Funktionen	149
9.2	Die Stetigkeit von Funktionen	151
9.3	Exponentialfunktion und Logarithmus	159
10	Algebra und algebraische Zahlentheorie	167
10.1	Die Dimension algebraischer Erweiterungen von $\mathbb{Q}$	167
10.2	Die Irreduzibilität von Polynomen	174
10.3	Der Hauptsatz über elementarsymmetrische Polynome	178
10.4	Der Fundamentalsatz der Algebra	191
10.5	Anwendungen des Fundamentalsatzes	198
10.6	Zahlkörper und Ganzheitsringe	203

11 Die ersten transzendenten Zahlen	225
11.1 Diophantische Approximationen	226
11.2 Das Ergebnis von LIOUVILLE	230
11.3 Die erste transzendente Zahl	235
11.4 Kettenbrüche	238
11.5 Kettenbrüche und transzendente Zahlen	247
11.6 Abschließende Bemerkungen	247
12 Differentialrechnung	249
12.1 Historische Entwicklung	249
12.2 Differenzierbarkeit	250
12.3 Regeln für die Differentiation	255
12.4 Die Produkt- und Reihendarstellung von e^x	260
12.5 Die Exponentialfunktion e^z für komplexe Zahlen	264
12.6 Wo liegen die Punkte e^z für $z \in \mathbb{C}$?	267
12.7 Trigonometrische Funktionen	274
12.8 Der Mittelwertsatz	277
12.9 Höhere Ableitungen	279
13 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	281
13.1 Elementare Konstruktionsschritte nach EUKLID	283
13.2 Die Konstruierbarkeit eines Punktes in $\mathbb{C}$	285
13.3 Die Konstruktion regelmäßiger n -Ecke	299
13.4 Ausblick	309
14 Integralrechnung	315
14.1 Eine sensationelle Entdeckung	316
14.2 Integration und Differentiation	318
14.3 FOURIER-Reihen und das Basler Problem	327
14.4 Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^2$	338
14.5 Uneigentliche Integrale	341
15 Erste Erkenntnisse über e und π	343
15.1 Das WALLISsche Produkt	343
15.2 Die STIRLINGSche Formel	344
15.3 Die Irrationalität von e und π	349

16 Elemente der Analysis im 18. Jahrhundert	353
16.1 Partielle Ableitungen	353
16.2 Das Kurvenintegral über ein totales Differential df	358
16.3 Integration PFAFFscher Differentialformen	361
17 Elemente der Funktionentheorie	373
17.1 Eine Idee von historischer Dimension	373
17.2 Komplexe PFAFFsche Differentialformen	376
17.3 Der Integralsatz von CAUCHY	380
17.4 Integrale über homotope Kurven	384
17.5 Die Integralformel von CAUCHY	390
18 Der große Transzendenzbeweis	397
18.1 Das Lemma von SIEGEL	402
18.2 Die Zahlen e, π und α^β für $\alpha, \beta \neq 0, 1$ algebraisch, $\beta \notin \mathbb{Q}$...	407
19 Weitere Ergebnisse zu transzendenten Zahlen	419
19.1 Der Satz von THUE-SIEGEL-ROTH	419
19.2 Die Arbeiten von BAKER zu Logarithmen	423
19.3 Weitere Resultate und offene Fragen	425
Literaturhinweise	431
Index	435